UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Cálculo de formas de Hilbert

Daniel Mejail

Director: Ariel M. Pacetti

Fecha de Presentación: 13 de octubre de 2021

Prefacio

El objetivo de este trabajo ha sido presentar los fundamentos teóricos detrás de dos métodos utilizados para el cálculo de formas de Hilbert. Estos métodos son conocidos como el *método definido* y el *método indefinido*, debido al uso que hacen de las álgebras de cuaterniones denominadas *definidas* e *indefinidas*, respectivamente. Nos hemos enfocado únicamente en los puntos que hemos considerado más importantes para entender la relevancia y el funcionamiento de dichos métodos. Hemos intentado responder a la siguientes preguntas: ¿qué es una forma de Hilbert? ¿qué quiere decir "calcular" en este contexto? y ¿cómo hacemos para calcular formas de Hilbert?

Vale la pena aclarar que, en cuanto a la última de estas tres preguntas, el "cómo", la respuesta que damos aquí es una respuesta parcial; nos hemos restringido a mostrar que nuestros objetos de interés tienen diversas realizaciones, siendo algunas de ellas más amenas al estudio mediante métodos computacionales. No nos hemos detenido, sin embargo, en proporcionar una descripción detallada de los algoritmos involucrados en estos cálculos. Los mismos se pueden hallar en las referencias; mencionamos, particularmente, los trabajos [5, 6, 7, 10, 21, 49].

En el Capítulo I, mencionamos algunas definiciones básicas e intentamos, dentro de lo posible, ilustrar algunos puntos a desarrollar en los capítulos subsiguientes, con el caso del cuerpo de números racionales.

El Capítulo II está dedicado a proporcionar resultados generales de la teoría de las álgebras de cuaterniones. Nos interesará, especialmente, entender el caso en el que el cuerpo de base es un cuerpo de números. Para poder tratar este caso, repasamos brevemente el lenguaje de los adèles y, utilizando esta herramienta, podremos enunciar los teoremas de clasificación (Teorema II.20), de aproximación fuerte (Teorema II.23) y de la norma (Teorema II.21). Dada un álgebra de cuaterniones y un orden en este álgebra podemos definir un objeto análogo al grupo de clases de un cuerpo de números, el *conjunto* de clases del orden. Los elementos de este conjunto son clases de ideales *invertibles* y, en el caso de un orden de Eichler, la cantidad de dichas clases es finita. Hacia el final del capítulo enunciamos un resultado que relaciona el conjunto de clases de un orden de Eichler con un grupo de clases del cuerpo de base.

En el Capítulo III, introducimos las formas de Hilbert sobre un cuerpo totalmente real F; daremos una definición "clásica", como funciones en el producto $\mathfrak{h}^n$ de copias del semiplano complejo superior, y una definición "adélica", como funciones en el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Este capítulo también tiene por ojetivo introducir los operadores de Hecke y mostrar en qué sentido es posible diagonalizarlos simultáneamente y caracterizarlos por los sistemas de autovalores asociados. Calcular los espacios de formas de Hilbert, se reduce entonces a determinar los posibles sistemas de autovalores para los operadores de Hecke.

Los últimos dos capítulos están dedicados a las formas modulares cuaterniónicas. En el Capítulo IV definimos formas modulares para un álgebra de cuaterniones arbitraria y enunciamos la correspondencia de Jacquet-Langlands. Finalmente, en el Capítulo V, nos restringimos a las álgebras definidas y a las álgebras indefinidas ramificadas en todos salvo un único lugar arquimediano, describiendo en mayor detalle los objetos utiizados en la práctica para calcular efectivamente formas de Hilbert.

Notación

A lo largo del presente trabajo utilizaremos la siguiente notación sin nuevas aclaraciones. Los símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ denotan, respectivamente, el anillo de números enteros racionales, los cuerpos de números racionales, reales y complejos y el álgebra de cuaterniones de Hamilton. El semiplano complejo superior lo denotamos $\mathfrak{h}$. Si A es un anillo, $A^\times$ denotará su grupo de unidades. Dado un cuerpo de números denotado por K, utilizamos $\mathfrak{o}_K$ para referirnos a su anillo de enteros. En general, letras como $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{N}$ o $\mathfrak{M}$ denotan ideales (íntegros o fraccionarios) en un cuerpo de números y $\mathfrak{p}$ o $\mathfrak{q}$ ideales primos. Por último, GL_2 denota el grupo de matrices invertibles de tamaño 2×2.

Agradecimientos

A mi madre y a mi padre, por todo su amor y apoyo y por haberme brindado tantas oportunidades; a mi hermano, por no parar de hacerme preguntas para las cuales no tengo respuesta; a Rosa, por tus consejos y tu insistencia; a la tía, por tu cariño constante; a Julia, por tu compañía y por "no hacerme bulla"; a la Sette, por tu fuerza (espero que algo haya llegado hasta acá); a Marian, por el tenis, el truco, las papas a las brasas, pero, por sobre todo, por tu amistad ¡Gracias!

Quisiera agradecer, también, a Ariel Pacetti, por haber aceptado guiarme en la realización de esta tesina, por haberme introducido a este área de la Matemática, por compartir su punto de vista y por seguir escuchándome y contestando mis preguntas ¡Gracias, Ariel!

Finalmente, agradezco a los miembros del jurado haber dedicado su tiempo a leer y evaluar este trabajo.

Índice general

I Introducción **1**

I.1 Formas modulares para $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ 5

I.2 La relación con las álgebras de cuaterniones 9

I.3 Un ejemplo 12

II Preliminares **15**

II.1 Álgebras de cuaterniones 15

II.2 Órdenes e ideales 17

II.2.1 Producto e inverso de ideales 17

II.2.2 El diferente 18

II.2.3 Ideales principales 19

II.2.4 Ideales invertibles 20

II.3 Álgebras de cuaterniones sobre cuerpos locales 21

II.3.1 Clasificación local 21

II.3.2 Órdenes e ideales sobre cuerpos locales no arquimedianos 22

II.4 Grupos en los adèles 24

II.5 Álgebras de cuaterniones sobre un cuerpo de números 26

II.5.1 El teorema de clasificación 27

II.5.2 El teorema de la norma 27

II.5.3 Aproximación fuerte 28

II.6 Propiedades locales 28

II.7 Clases de ideales 30

III Formas modulares de Hilbert **31**

III.1 El grupo $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ y subgrupos de congruencia 31

III.2 Formas modulares para subgrupos de congruencia 34

III.3 Producto interno de formas cuspidales 39

III.4 Formas modulares de nivel $\mathfrak{N}$ 40

III.5 Funciones en los adèles 44

III.5.1 Funciones de cuadrado integrable 45

III.5.2 Una acción a derecha 47

III.6 Operadores de Hecke 48
III.6.1 Operadores en el espacio de formas automorfas 48
III.6.2 Operadores de convolución 50
III.6.3 El álgebra de Hecke 51
III.6.4 Relación con el isomorfismo (III.4.2) 53
III.6.5 Relación con los coeficientes de Fourier 55
III.7 Formas viejas, formas nuevas 57

IV Formas modulares cuaterniónicas **61**
IV.1 Variedades de Shimura cuaterniónicas 61
IV.2 Un $B^{\times}$-módulo 64
IV.3 Formas modulares cuaterniónicas 65
IV.3.1 Caso indefinido 66
IV.3.2 Caso definido 67
IV.4 Funciones en los adèles 68
IV.4.1 Caso indefinido 68
IV.4.2 Caso definido 69
IV.4.3 Formas automorfas 70
IV.5 La correspondencia de Jacquet-Langlands 71

V Métodos para el cálculo de formas de Hilbert **75**
V.1 Método indefinido 75
V.1.1 Cohomología de grupos 77
V.1.2 Isomorfismos de Eichler-Shimura 79
V.1.3 Acción de Hecke en cohomología 83
V.1.4 Comentarios acerca del método indefinido 85
V.2 Método definido 86

Bibliografía **91**

Capítulo I

Introducción

Sea F un cuerpo de números de grado $[F:\mathbb{Q}] = n$ sobre $\mathbb{Q}$. La extensión $F/\mathbb{Q}$ se dice *totalmente real*, si $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$, es decir, si las n inmersiones no equivalentes $\iota_i : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ tienen imagen en $\mathbb{R}$. Sea $x \in F$ y sean $x_i = \iota_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$. Se dice que x es *totalmente positivo*, si $x_i > 0$ para todo i. Abreviamos esto por $x \gg 0$. En general, dado un cuerpo de números F con anillo de enteros $\mathfrak{o}_F$, un ideal fraccionario de F (o de $\mathfrak{o}_F$) es un $\mathfrak{o}_F$-submódulo finitamente generado de F. Los ideales fraccionarios (no nulos) conforman un grupo con la operación de multiplicación de ideales y el elemento neutro es $\mathfrak{o}_F$. Dado un ideal fraccionario $\mathfrak{a} \subset F$, su inverso está dado por

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{x \in F : x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_F\} .$$

Dos ideales fraccionarios $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ se dicen equivalentes, si existe $x \in F$ tal que $\mathfrak{a} = x\mathfrak{b}$. Las clases de equivalencia constituyen un grupo, el *grupo de clases* de F, denotado $\mathrm{Cl}(F)$. El *número de clases de* F es el cardinal $h = h(F)$ del grupo $\mathrm{Cl}(F)$.

Si F es un cuerpo de números totalmente real, podemos distinguir una relación más fuerte: los ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son *equivalentes en sentido estricto*, si existe $x \in F$ totalmente positivo tal que $\mathfrak{a} = x\mathfrak{b}$. En este caso, las clases también constituyen un grupo, denotado por $\mathrm{Cl}^+(F)$, denominado *grupo de clases estrictas* de F. El cardinal de este grupo es el *número de clases estrictas de* F y será denotado por $h^+ = h^+(F)$. Usando cada una de las inmersiones de F en $\mathbb{R}$, podemos mirar el grupo $\mathrm{GL}_2(F)$ dentro de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ vía

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \gamma_i = \iota_i(\gamma) = \begin{bmatrix} \iota_i(a) & \iota_i(b) \\ \iota_i(c) & \iota_i(d) \end{bmatrix} .$$

Si nos restringimos al subgrupo

$$\mathrm{GL}_2^+(F) = \left\{\gamma \in \mathrm{GL}_2(F) : \det(\gamma) \gg 0\right\} ,$$

las matrices de determinante totalmente positivo, entonces $\mathrm{GL}_2^+(F)$ actúa en el producto

$\mathfrak{h}^n$ de n copias del semiplano de Poincaré por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} = \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \ldots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n} \right) ,$$

donde $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{h}^n$ y $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(F)$. Dado un ideal íntegro $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{o}_F$ consideramos subgrupos de $\mathrm{GL}_2^+(F)$ análogos a los subgrupos de congruencia $\Gamma_0(N)$, $N > 1$, de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Una diferencia importante con el grupo modular, es que es necesario considerar *varios* subgrupos a la vez. Dado un ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ de F, definimos

$$\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(F) \,:\, a, d \in \mathfrak{o}_F,\, b \in \mathfrak{a},\, c \in \mathfrak{N}\mathfrak{a}^{-1},\, ad - bc \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times \right\} .$$

Una forma de Hilbert *clásica* es, en analogía con una forma modular elíptica, una función holomorfa $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ que satisface una regla de transformación

$$f\big|_{\underline{k}}\gamma = \chi(\gamma) f ,$$

para toda γ en algún subgrupo de congruencia de $\mathrm{GL}_2^+(F)$ y algún carácter χ, donde $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ es el *peso* de la forma modular. Específicamente, nos concetraremos en el caso en que el carácter $\chi = 1$ es trivial y el subgrupo de congruencia es uno de los grupos $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$. La regla de transformación se suele presentar de distintas maneras; la definición usual es

$$f\big|_{\underline{k}}\gamma(z) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\det(\gamma_i)^{k_i/2}}{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}} \right) f(\gamma z) , \tag{I.0.1}$$

donde $j : \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}^\times$ es el factor de automorfía dado por $j(\gamma, z) = cz + d$. Siguiendo [10], nosotros definiremos

$$f\big|_{\underline{k}}\gamma(z) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\det(\gamma_i)^{m_i + k_i - 1}}{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}} \right) f(\gamma z) ,$$

con una elección particular de valores (*enteros*) m_i.

Si bien muchas de las definiciones y propiedades se generalizan fácilmente desde la situación de formas modulares a formas de Hilbert, muchas otras no. La definición de los operadores de Hecke en los espacios de formas de Hilbert cuando $h^+ > 1$, por ejemplo, presenta algunas dificultades desde el punto de vista clásico. Estas dificultades se resuelven pensando a las formas de Hilbert como funciones adélicas, es decir, funciones en $\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$[1] que verifican ciertas condiciones de regularidad y tienen un

[1] En general, si F es un cuerpo de números, el *anillo de adèles* es el producto directo restringido $\mathbb{A}_F = \prod'_v F_v$ de las completaciones F_v del cuerpo en cada lugar v, con respecto a los abiertos compactos $\mathfrak{o}_{F,v}$ –los subanillos compactos maximales– definidos para los lugares finitos. Ver la Definición II.16. Escribimos también $\mathbb{A}_F = F_\infty \times \widehat{F}$, donde $F_\infty = \prod_{v \in V_\infty^F} F_v$ denota el producto sobre los lugares arquimedianos y $\widehat{F} = \prod'_{v \in V_f^F} F_v$ denota el producto restringido únicamente sobre los lugares finitos.

comportamiento adecuado respecto de la acción de un subgrupo compacto de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ y del centro $\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$.

Por otro lado, cocientes de la forma

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$$

para un cuerpo de números $F/\mathbb{Q}$ y un grupo algebraico G definido sobre F (una manera coherente de asignar un grupo a cada F-álgebra) suele clasificar objetos geométricos. Por ejemplo, si $F = \mathbb{Q}$ y $G = \mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, se sabe que el cociente

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{Z}(\mathbb{R})\mathrm{SO}(2)G(\widehat{\mathbb{Z}}) \ ,$$

donde $\mathrm{Z} \subset G$ es el centro (las martices escalares) y $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ es el producto directo sobre los lugares finitos, clasifica curvas elípticas módulo isomorfismo.[2] Un poco más en general, dado $N > 1$ un entero, definimos un subgrupo abierto y compacto de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Q}})$ de la siguiente manera: para cada lugar finito $v \in V_f^\mathbb{Q}$, si el primo p correspondiente a v no divide a N, definimos $K_0(N)_v := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$. En cambio, si p divide a N, $K_0(N)_v$ es el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_v)$ de matrices con coordenada inferior izquierda en el ideal $N\mathbb{Z}_v$. Esto determina un subgrupo compacto abierto de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Q}})$:

$$K_0(N) \ = \prod_{v \in V_f^\mathbb{Q}} K_0(N)_v \ .$$

Dado que el determinante define un morfismo sobreyectivo $\det : K_0(N)_v \to \mathbb{Z}_v^\times$, por aproximación fuerte (Teorema II.23), tenemos que[3]

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \ = \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,K_0(N) \ . \tag{I.0.2}$$

Dado que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ contiene elementos de determinante negativo, podemos reemplazar $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ por $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ en la igualdad anterior. En particular, la inclusión $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ seguida de la proyección en el doble cociente $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_0(N)$ es sobreyectiva y el núcleo de esta composición es el subgrupo $\Gamma_0(N)$. Es decir,

$$\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \ \simeq \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_0(N) \ .$$

[2]Notemos que $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ es un grupo abierto y compacto de la parte no arquimediana $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Q}})$ y que $\mathrm{SO}(2)$ es el subgrupo compacto (conexo) maximal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. El producto

$$\mathrm{SO}(2)\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \ \subset \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Q}}) \ = \ \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$$

es un subgrupo compacto.

[3]Si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, existen $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ y $r \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ tales que $\det(g) = \lambda\, r$, pues $\mathbb{Q}^\times\backslash\widehat{\mathbb{Q}}^\times/\widehat{\mathbb{Z}}^\times \simeq \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = \{1\}$. Entonces, por ejemplo, $g = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & \\ & 1\end{smallmatrix}\right] g_1 \left[\begin{smallmatrix}r & \\ & 1\end{smallmatrix}\right]$, donde $g_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ tiene determinante 1 y $\left[\begin{smallmatrix}r & \\ & 1\end{smallmatrix}\right]$ pertenece a $K_0(N)$.

Tomando el cociente por los centros, se deduce que

$$\mathrm{Z}(\mathbb{R})^+\,\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Z}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_0(N)\ .$$

El grupo $\mathrm{Z}(\mathbb{R})^+$ consiste en las matrices escalares con coeficientes reales positivos. Simplificando y dividiendo por SO(2),

$$\Gamma_0(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathrm{Z}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_0(N)\,\mathrm{SO}(2)\ . \tag{I.0.3}$$

Pero el cociente de la izquierda se identifica con la curva modular $Y_0(N)$. En este caso, el cociente adélico clasifica curvas elípticas teniendo en cuenta información de la N-torsión.

Podríamos decir que, en general, una forma modular es una función en $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. Claro que, en cada caso, es necesario hallar condiciones sobre esta familia de funciones para poder extraer de ella un *espacio de formas modulares* adecuado. Las formas modulares para el subgrupo de congruencia $\Gamma_0(N)$ se corresponden con cierto espacio de funciones en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ (Proposición I.2) y, más generalmente, las formas modulares de Hilbert para un cuerpo totalmente real F se pueden ver como funciones asociadas al grupo $\mathrm{GL}_{2/F}$ (§ III.5). De manera similar, el grupo de unidades de un álgebra de cuaterniones B/F definida sobre una cuerpo de números totalmente real tiene asociada una noción de forma modular (§ IV.4).

En este contexto, la correspondencia de Jacquet-Langlands es fundamental en tanto que establece una relación entre formas de Hilbert cuspidales y formas cuaterniónicas. Sea $\mathfrak{D}$ el producto de los primos finitos en donde B ramifica (el *discriminante* de B, ver § II.2) y sea $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{o}_F$ un ideal íntegro coprimo con $\mathfrak{D}$. Denotamos por $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y por $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ los espacios de formas de Hilbert cuspidales y, respectivamente, de formas cuaterniónicas para el álgebra B de nivel $\mathfrak{N}$. El resultado es, entonces, el siguiente.

Teorema I.1 (Jacquet-Langlands)**.** *Existe un morfismo inyectivo*

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}') \hookrightarrow \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{D}\mathfrak{N}')$$

que preserva la acción de Hecke y cuya imagen es el subespacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{D}\mathfrak{N}')^{\mathfrak{D}-\mathrm{new}}$ *de formas nuevas en todo ideal primo divisor de* $\mathfrak{D}$*.*

Como en el caso de las formas modulares elípticas, existe, en esta situación, una teoría de formas nuevas y formas viejas, lo que permite, en conjunción con el Teorema I.1, reducir el problema de calcular $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ a trabajar con espacios de formas cuaterniónicas, amenos para relizar cálculos explícitos. Aun así, en la práctica, se presenta un inconveniente: dado que los primos que componen a $\mathfrak{D}$ son todos distintos, el álgebra B estará limitada por el grado de la extensión $F/\mathbb{Q}$ y el nivel $\mathfrak{N}$ (§ IV.5).

El Teorema I.1 pone de manifiesto que los espacios $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ deben ser considerados en conjunto. Sin embargo, conceptualmente, las funciones que los conforman son de naturaleza distinta. Específicamente, si B es un álgebra indefinida, tiene asociada una variedad compleja, de dimensión igual a la cantidad de lugares arquimedianos no ramificados del álgebra, y las formas cuaterniónicas para B son ciertas formas (diferenciales holomorfas) sobre dicha variedad; si, en cambio, B es totalmente definida, el objeto análogo es un conjunto finito de puntos y una forma modular es, simplemente, una función definida en este conjunto. Esta diferencia se ve reflejada en los métodos utilizados para calcular formas de Hilbert mediante su relación con las álgebras de cuaterniones.

En lo que resta de esta introducción, intentaremos mostrar, restringiéndonos a la situación en la que el cuerpo de base es $\mathbb{Q}$, algunos puntos de la teoría que desarrollaremos más adelante en un contexto más general.

I.1. Formas modulares para $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$

A continuación explicamos brevemente la correspondencia entre las formas modulares elípticas "clásicas" y sus contrapartes adélicas. En esta sección, la expresión $f\big|_k\gamma$ estará dada por (I.0.1) con $n = 1$.

A una función $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, le podemos asociar, bajo ciertas condiciones, una nueva función $\phi_f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$. Una función definida en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ se denomina *función adélica.* Si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, por (I.0.2), existen $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ y $\widehat{\alpha} \in K_0(N)$ tales que $g = \gamma g_\infty \widehat{\alpha}$. Si $f\big|_k\gamma = f$ para toda $\gamma \in \Gamma_0(N)$, entonces

$$\phi_f(g) \;=\; \det{(g_\infty)}^{k/2} j(g_\infty, i)^{-k} f(g_\infty \cdot i) \tag{I.1.1}$$

es independiente de la descomposición $g = \gamma g_\infty \widehat{\alpha}$. Se puede comprobar que ϕ_f verifica *(i)* a *(iv)* de la Proposición I.2. Queremos ver qué otras propiedades tiene esta función.

Además de estas condiciones de invarianza, ϕ_f satisface ciertas condiciones de regularidad. Si f es una función meromorfa y de peso k invariante para $\Gamma_0(N)$, entonces $f \in \mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N)\right)$, si y sólo si la función $\Gamma_0(N)$-invariante $f(z)\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}$ está acotada en $\mathfrak{h}$.[4] En ese caso, la igualdad

$$\left|\phi_f(\gamma g_\infty \widehat{\alpha})\right| \;=\; \left|f(g_\infty \cdot i)\, j(g_\infty, i)^{-k} \det{(g_\infty)}^{k/2}\right| \;=\; \left|f(z)\,\mathrm{Im}(z)^{k/2}\right|$$

($z = g_\infty \cdot i$) muestra que ϕ_f está acotada. Dado que el cociente $Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ tiene medida finita,[5] se deduce que la integral de $|\phi_f|^2$ sobre este espacio es finita.

Ahora bien, la definición de forma cuspidal está dada en términos de las expansiones de Fourier: si $f \in \mathcal{M}_k\left(\Gamma_0(N)\right)$ y $\sum_{n\geq 0} a_n(f\big|_k\gamma)\, q^n$ es la expansión de Fourier de $f\big|_k\gamma$, entonces f es cuspidal, si $a_0(f\big|_k\gamma) = 0$ para toda $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. Podemos expresar los

[4] [35, Ch. 2, § 1]

[5] El cociente (I.0.3) se identifica con la curva modular $Y_0(N)$, que tiene volumen finito, y el grupo $K_0(N)\,\mathrm{SO}(2)$ es compacto.

coeficientes de la siguiente manera:

$$a_n\big(f\big|_k\gamma\big) \;=\; \int_{-1/2}^{1/2} \big(f\big|_k\gamma\big)(z+t)\, e^{-2\pi i n(z+t)}\, dt$$

para cualquier $z \in \mathfrak{h}$. Para relacionar esto con el comportamiento de la función ϕ_f, tomamos $x \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ y $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Sea Φ la función

$$\Phi(x) \;=\; \phi_f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} g\right)$$

y notemos que, si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $\Phi(x+a) = \Phi(x)$. Podemos considerarla como función en el grupo compacto $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ y admite una expansión de Fourier:

$$\Phi(x) \;=\; \sum_{a\in\mathbb{Q}} c_a\, \psi(ax)\ ,$$

donde ψ es un carácter de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ trivial en $\mathbb{Q}$. El coeficiente c_a está dado por

$$c_a \;=\; \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi_f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} g\right)\, \psi(-ax)\, dx\ .$$

Nos interesa, en particular, c_0. Sean $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $g_\infty, g'_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ y $\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}' \in K_0(N)$ tales que

$$g \;=\; \gamma g_\infty \widehat{\alpha} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \gamma g_\infty \widehat{\alpha} \;=\; \gamma' g'_\infty \widehat{\alpha}'\ .$$

En particular,

$$g'_\infty \;=\; (\gamma'_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x_\infty \\ & 1 \end{bmatrix} \gamma_\infty g_\infty\ ,$$

donde x_∞ denota la componente arquimediana de x y $\gamma_\infty = \iota_\infty(\gamma) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\phi_f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \gamma g_\infty \widehat{\alpha}\right) \;=\; \phi_f(\gamma' g'_\infty \widehat{\alpha}') \;=\; f(g'_\infty \cdot i)\, j(g'_\infty, i)^{-k} \det{(g'_\infty)}^{k/2}\ .$$

Pero esto es igual a

$$\begin{aligned} &\big(f\big|_k\gamma_\infty'^{-1}\big)\big((\gamma_\infty g_\infty \cdot i) + x_\infty\big)\, j\left(\begin{bmatrix} 1 & x_\infty \\ & 1 \end{bmatrix} \gamma_\infty g_\infty, i\right)^{-k} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & x_\infty \\ & 1 \end{bmatrix} \gamma_\infty g_\infty\right)^{k/2} \\ &\quad=\; \big(f\big|_k\gamma_\infty'^{-1}\big)\big((\gamma_\infty g_\infty \cdot i) + x_\infty\big)\, j(\gamma_\infty g_\infty, i)^{-k} \det{(\gamma_\infty g_\infty)}^{k/2}\ , \end{aligned}$$

por la propiedad de cociclo de j y porque la matriz asociada a x tiene determinante 1. Para recuperar los coeficientes de la expansión de Φ, integramos sobre el compacto $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \prod_p \mathbb{Z}_p$:

$$\begin{aligned} c_0 \;&=\; \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi_f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} g\right) dx \;=\; C \int_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\prod_p \mathbb{Z}_p} \left(f\big|_k \gamma_\infty'^{-1}\right) \left((\gamma_\infty g_\infty \cdot i) + x_\infty\right) dx \\ &=\; C \int_{-1/2}^{1/2} f\big|_k \gamma_\infty'^{-1}(z+t)\, dt \;=\; C\, a_0(f\big|_k \gamma_\infty'^{-1}) \;=\; 0 \end{aligned}$$

(C es simplemente alguna constante y $z = \gamma_\infty g_\infty \cdot i$). En definitiva, hemos demostrado que la función ϕ_f asociada a una f cuspidal es *de cuadrado integrable (módulo el centro)*:

$$\int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} |\phi_f(g)|^2\, dg \;<\; \infty$$

y es *cuspidal* en tanto que

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi_f\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} g\right) dx \;=\; 0$$

para $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.

Esto no es suficiente para caracterizar la imagen de $\mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N)\right)$ por la aplicación $f \mapsto \phi_f$. Para ello, introducimos el operador de Casimir. Usando la *descomposición de Iwasawa*, si $g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ entonces existen $x, \theta \in \mathbb{R}$, $y, u \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$g_\infty \;=\; \begin{bmatrix} u & \\ & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ & y^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{I.1.2}$$

Teniendo en cuenta esta descomposición, definimos el *operador de Casimir* como

$$\Delta \;=\; -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \;-\; y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta} .$$

La función ϕ_f satisface la ecuación diferencial:

$$\Delta\phi_f \;=\; -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right) \phi_f ,$$

es decir, vista como función en $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, es C^∞ y es solución de esta ecuación. Dada $g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, por (I.1.2), se cumple que

$$\phi_f(g_\infty) \;=\; f(x+iy)\, y^{k/2}\, e^{ik\theta} . \tag{I.1.3}$$

Derivando respecto de las variables x, y, θ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\phi_f(g_\infty) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+iy)\,y^{k/2}\,e^{ik\theta}\ , \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}\,\phi_f(g_\infty) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+iy)\,y^{k/2}(ik)\,e^{ik\theta}\ , \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\phi_f(g_\infty) &= \bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+iy)\,y^{k/2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy)\,k\,y^{k/2-1} \\
&\qquad + f(x+iy)\,\tfrac{k}{2}\left(\tfrac{k}{2}-1\right)y^{k/2-2}\bigg)\ e^{ik\theta}\ .
\end{aligned}$$

Al ser f una función holomorfa, se deduce que ϕ_f es autofunción de Δ con autovalor $-\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)$.

Diremos que una función en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Q}})$ a valores complejos es *suave*, si es C^∞ en la primera variable y localmente constante en la segunda.

Proposición I.2 ([19, § 3])**.** *La aplicación que a una función $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ le asigna la función $\phi_f :\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\phi_f(\gamma g_\infty \widehat{\alpha}) \;=\; \det(g_\infty)^{k/2} j(g_\infty, i)^{-k}\, f(g_\infty \cdot i) \tag{I.1.4}$$

determina un isomorfismo entre el espacio de formas cuspidales $\mathcal{S}_k\left(\Gamma_0(N)\right)$ y el espacio de funciones suaves $\phi :\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{C}$ que satisfacen

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ *para toda* $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$,

(ii) $\phi(g\widehat{\beta}) = \phi(g)$ *para toda* $\widehat{\beta} \in K_0(N)$,

(iii) $\phi(g r_\theta) = e^{ik\theta}\,\phi(g)$ *para toda* $r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$ *y*

(iv) $\phi(\eta g) = \phi(g)$ *para toda* $\eta \in Z(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

y además

(v) ϕ *es de* crecimiento moderado*: para todo compacto* $\Omega \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ *y toda* $c > 0$, *existen constantes* C *y* N *positivas tales que, para* $g \in \Omega$ *y* $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$ *tal que* $|a| > c$

$$\left|\phi\left(\begin{bmatrix} a & \\ & 1\end{bmatrix} g\right)\right| \;\le\; C|a|^N\ ,$$

(vi) ϕ, *como función de* $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, *es solución de la ecuación diferencial*

$$\Delta\phi \;=\; -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\phi\ ,$$

(vii) ϕ *es* cuspidal, *es decir,*

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1\end{bmatrix} g\right) dx \;=\; 0$$

para casi todo g.

I.2. La relación con las álgebras de cuaterniones

Al igual que al grupo $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, a un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de números totalmente real se le puede asociar una noción de forma modular, denominada *cuaterniónica*. Su importancia viene, en parte, de que proporcionan una manera de calcular formas modulares clásicas, es decir, bases o conjuntos de generadores de estos espacios conformados por autoformas para la acción de los operadores de Hecke. Esta relación está dada por la correspondencia de Jacquet-Langlands: a partir de una "autoforma de Hecke cuaterniónica" f_B para un álgebra de cuaterniones B sobre un cuerpo de números totalmente real $F/\mathbb{Q}$, es posible hallar una autoforma de Hecke θ_f para $\mathrm{GL}_{2/F}$ con los mismos autovalores.

Para ilustrar la idea, veamos un ejemplo sobre $\mathbb{Q}$ de cómo obtener (parte de) el módulo de Hecke $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N))$ usando álgebras de cuaterniones y formas asociadas. Lo que se encuentra a continuación está tomado de [15]; ver también [39].

Sea B un álgebra de cuaterniones sobre $\mathbb{Q}$, definida, es decir, ramificada en ∞ y al menos en algún lugar finito, con generadores i, j tales que

$$i^2 = a \ , \quad j^2 = b \quad \text{e} \quad ij + ji = 0 \ ,$$

con $a, b < 0$. Si definimos $k = ij$, entonces $\{1, i, j, k\}$ es una base de B sobre $\mathbb{Q}$ como espacio vectorial. Sea $K/\mathbb{Q}$ la extensión cuadrática (imaginaria) $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Los elementos de B se pueden expresar como matrices con coeficientes en el cuerpo K, vía las identificaciones

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} , \quad i = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \\ & -\sqrt{a} \end{bmatrix} , \quad j = \begin{bmatrix} & 1 \\ b & \end{bmatrix} , \quad k = \begin{bmatrix} & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & \end{bmatrix} .$$

Si $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in B$, entonces $x = z_1 + z_2 j$, con $z_1 = x_0 + x_1 i$ y $z_2 = x_2 + x_3 i$ elementos de K. Definimos

$$\big[z\big] = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ b\,\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K) \ ,$$

donde $\bar{\cdot}$ denota el automorfismo no trivial de K determinado por $\sqrt{a} \mapsto -\sqrt{a}$. Dadas dos indeterminadas X, Y, definimos una acción a derecha de $B^\times$ sobre el espacio vectorial de polinomios homogéneos en X e Y de grado 1 por

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \cdot z = \begin{bmatrix} X \cdot z \\ Y \cdot z \end{bmatrix} := \big[z\big] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 X + z_2 Y \\ b\,\bar{z}_2 X + \bar{z}_1 Y \end{bmatrix} ,$$

para cada $z \in B^\times$. En general, sobre el espacio de polinomios homogéneos de grado l, se define

$$\begin{bmatrix} X^l \\ X^{l-1}Y \\ \vdots \\ Y^l \end{bmatrix} \cdot z := \begin{bmatrix} (X \cdot z)^l \\ (X \cdot z)^{l-1}(Y \cdot z) \\ \vdots \\ (Y \cdot z)^l \end{bmatrix} .$$

Denotamos esta acción por $\phi_l(z)$. Definimos también $\phi_0(z) = 1$ para todo $z \in B^\times$, la representación trivial.

Sea D el *discriminante* de B, el producto de los primos finitos en donde B ramifica. Escribimos $N = DN'$. Sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ un orden de Eichler de nivel N' en B. Esto quiere decir que $\mathcal{O}$ es intersección de dos órdenes maximales de B y que, para todo primo p que no divide a D, $\mathcal{O}_p := \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p$ es conjugado al orden $\begin{bmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N'\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{bmatrix}$ en $B_p = M_{2\times 2}(\mathbb{Q}_p)$. Sea $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$ el conjunto de clases de $\mathcal{O}$-ideales a derecha (invertibles).[6] El número de clases $H := \#\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$ es finito (ver el Teorema II.29). Sea $I_1 = \mathcal{O}_1$ y sean $I_2, \ldots, I_H$ representantes de las otras clases de $\mathcal{O}$-ideales. Sean $\mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_H$ sus respectivos órdenes a izquierda. Para cada $i, j \in [\![1, H]\!]$ y $n \geq 1$ se consideran los ideales íntegros $J_{i,j}$ en B de norma n y tales que existe $A_{i,j} \in B^\times$ con

$$J_{i,j} \,=\, A_{i,j}\, I_j I_i^{-1} \,,$$

es decir, ideales con orden a derecha $\mathcal{O}_{der}(J_{i,j}) = \mathcal{O}_i$, íntegros y equivalentes a izquierda a $I_j I_i^{-1}$. Para cada i, definimos $e_i := |\mathcal{O}_i^\times|$ y, para cada $n \geq 1$ y $l \geq 0$, una matriz $B_l(n) = B_l(n; D, N')$ como

$$B_l(n) \,=\, \Big[b_l(n)_{i,j}\Big]_{i,j\in[\![1,H]\!]} \quad , \qquad b_l(n)_{i,j} \,=\, \sum_{A_{i,j}} \phi_l(A_{i,j})^t \frac{1}{e_i} \ .$$

La coordenada (i, j) de la matriz $B_l(n)$ es el endomorfismo $b_l(n)_{i,j}$ dado por la sumatoria $\sum \phi_l(A_{ij})^t(1/e_i)$ sobre todos los elementos del conjunto

$$\Big\{A_{i,j} \in I_i I_j^{-1} \,:\, \mathrm{nrd}(A_{i,j}\, I_j I_i^{-1}) = n\Big\} \ .$$

Estas definiciones se extienden al caso $n = 0$ por $b_l(0)_{i,j} = 0$, si $l \geq 1$, y $b_0(0)_{i,j} = 1/e_i$.

Las matrices $B_0(n)$ son de particular interés. Si $n \geq 1$, sus coordenadas $b_0(n)_{i,j}$ son números enteros:

$$b_0(n)_{i,j} \,=\, \#\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales íntegros } J_{i,j} \,:\, \mathcal{O}_{der}(J_{i,j}) = \mathcal{O}_i, \\ J_{i,j} \sim I_j I_i^{-1}, \, \mathrm{nrd}(J_{i,j}) = n \end{array} \right\}$$

y, más aun, la sumatoria $b(n) = \sum_i b_0(n)_{i,j}$ es independiente de j.[7] Además, es posible reducir simultáneamente en bloques, para $n \geq 0$:[8]

$$B_0(n) \,=\, \begin{bmatrix} B_0(n)' & \\ & b(n) \end{bmatrix} \ .$$

[6] Dos ideales I, J pertenecen a la misma clase, si $I = bJ$ para cierto $b \in B^\times$; en tal caso, escribimos $I \sim J$. Comparar con [15, § II.5], en donde se consideran ideales cuyo orden a *izquierda* es $\mathcal{O}$.

[7] [39, Lemma 2.18].

[8] [39, Remark 2.20].

Sea $\underline{\theta}_l(z; D, N')$ la serie

$$\underline{\theta}_l(z; D, N') = \sum_{n=0}^{\infty} B_l(n; D, N')\, q^n$$

($q = e^{2\pi i z}$). En [15], Eichler demuestra que los coeficientes de estas matrices son las series de formas modulares para $\Gamma_0(DN')$ de peso $l+2$. Si $l > 0$, dichas formas son cuspidales. Para obtener formas cuspidales de peso 2 (cuando $l = 0$), se considera la serie definida de manera análoga, con $B_0(n)'$ en lugar de $B_l(n)$. Al igual que los operadores de Hecke, las matrices $B_l(n)$ ($(n, DN') = 1$) generan un anillo conmutativo y semisimple, y verifican las mismas identidades que dichos operadores.

Una consecuencia de esto es que es posible diagonalizar simultáneamente las matrices $B_l(n)$ (l fijo). Para $l = 0$, podemos diagonalizar la parte cuspidal $B_0(n)'$, de manera análoga. Para cada $l \geq 0$, las series de matrices que se obtienen a partir de dichas matrices diagonalizadas se corresponden con formas cuspidales que son autoformas para todos los operadores de Hecke T_n ($(n, DN') = 1$). Sea $\Theta_l(D, N')$ el módulo generado por las formas que se obtienen diagonalizando $B_l(n)$ y $\Theta_0(D, N')'$ el módulo que se obtiene de manera análoga a partir de las $B_0(n)'$. El resultado prncipal de Eichler es el siguiente (en un caso particular):

Teorema I.3 (Eichler)**.** *Sea $N' \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y p un primo coprimo con N'. El módulo de Hecke $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(pN'))$, de formas cuspidales de peso 2 para $\Gamma_0(pN')$, se descompone de la siguiente manera.*

$$\mathcal{S}_2(\Gamma_0(pN')) = \Theta_0(p, N')' \oplus \iota_1(\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N'))) \oplus \iota_p(\mathcal{S}_2(\Gamma_0(N'))) .$$

Es decir, usando el álgebra definida que ramifica en un único primo finito p, es posible aislar la parte de $\mathcal{S}_2(\Gamma_0(pN'))$ conformada por las formas nuevas en p. Para hallar esta descomposición, lo que se hace es encontrar objetos análogos a los operadores de Hecke –estas matrices $B_l(n)$, llamadas *matrices de Brandt*– y hallar una relación entre los anillos que generan; concretamente, las matrices de Brandt, como los operadores de Hecke, generan anillos conmutativos semisimples y las trazas de sus elementos son iguales. Puesto que los coeficientes de las series $\underline{\theta}_l$ son series *theta* asociadas a la forma norma de los ideales del álgebra, se logra dar un conjunto de generadores del espacio de formas cuspidales "aritméticamente distinguido". Dadas autoformas de Hecke para el álgebra de cuaterniones de discriminante D, se obtiene un conjunto de formas modulares elípticas cuspidales, también autoformas de Hecke, y con los mismos autovalores, entre las cuales se puede hallar un subconjunto linealmente independiente generando la parte correspondiente a las formas nuevas en D.

I.3. Un ejemplo

Sea $B = (-1, -11)_{\mathbb{Q}}$ el álgebra de cuaterniones de discriminante 11 sobre $\mathbb{Q}$, generada por elementos $\{1, i, j, k\}$ que verifican $i^2 = -1$, $j^2 = -11$ y $k = ij = -ji$. A modo de ejemplo, calculamos el espacio $\mathcal{S}_2^B(1) := \Theta_0(11, 1)'$.

En primer lugar, buscamos un orden maximal en B. El retículo $\mathcal{R} = \langle 1, i, j, k\rangle$ es un orden en B, pero no es maximal ($\operatorname{disc}(1, i, j, k) = 4^2\, 11^2$). Si definimos $\rho = \frac{1+i+j+k}{2}$ y $z = \frac{1+j}{2}$, entonces los retículos $\mathcal{R}' = \langle 1, i, j, \rho\rangle$ y $\mathcal{O} = \langle 1, i, z, iz\rangle$ son órdenes y se cumple $\mathcal{O} \supset \mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$, con inclusiones estrictas. El orden $\mathcal{O} = \langle 1, i, z, iz\rangle$ es maximal y, llamando $q_{\mathcal{O}}$ a la forma cuadrática asociada,

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{O}}(u, v, w, t) &= \operatorname{nrd}(u \cdot 1 + v \cdot i + w \cdot z + t \cdot iz) \\ &= \left(u + \tfrac{w}{2}\right)^2 + 11\left(\tfrac{w}{2}\right)^2 + \left(v + \tfrac{t}{2}\right)^2 + 11\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 \\ &= u^2 + uw + 3\,w^2 + v^2 + vt + 3\,t^2\ , \end{aligned}$$

las unidades del orden $\mathcal{O}$ son los elementos $x = u\,1 + v\,i + w\,z + t\,iz \in \mathcal{O}$ tales que $q_{\mathcal{O}}(u, v, w, t) = 1$ (al ser B definida, la forma es positiva). Se comprueba que $\left|\mathcal{O}^\times\right| = 4$.

En general, dado un ideal $I = \langle \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \alpha_4\rangle$ de B, definimos la forma cuadrática $q_I(u, v, w, t) = \operatorname{nrd}(x)/\operatorname{nrd}(I)$, donde $x = u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3 + t\alpha_4$. Definimos, también, el número de representación $n_I(p)$ como la cantidad de soluciones a la ecuación $q_I = p$. Si $\mathcal{O}$ es el orden a derecha de I y llamamos $\mathcal{O}_I$ a su orden a izquierda, entonces el cociente $n_I(p)/\left|\mathcal{O}_I^\times\right|$ es igual al número de ideales de norma p, contenidos en el orden $\mathcal{O}$ y pertenecientes a la clase del ideal I.[9] Si p no divide al discriminante del álgebra, entonces, eligiendo representantes $\{I_1, \ldots, I_H\}$ de $\operatorname{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$,

$$p + 1 = \sum_{i=1}^{H} \frac{n_i(p)}{\left|\mathcal{O}_i^\times\right|}$$

($n_i = n_{I_i}$, $q_i = q_{I_i}$ y $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{I_i}$).

Volviendo al ejemplo, sea $p = 2$. Entonces, se verifica que $n_{\mathcal{O}}(2) = 4$ y que, de los tres ideales íntegros de norma 2, sólo uno es principal. Por lo tanto, debe haber, al menos, otra clase en $\operatorname{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$. Antes de empezar a buscar otros ideales, observamos que el elemento $1 + i \in \mathcal{O}$ tiene norma reducida $\operatorname{nrd}(1 + i) = 2$ y que el ideal íntegro de norma 2 correspondiente a la clase principal es $(1 + i)\,\mathcal{O}$. Observamos también que, si dos ideales I, J cumplen $J \subset I$, entonces $\operatorname{nrd}(I) \mid \operatorname{nrd}(J)$. Buscamos, entonces, un ideal $I \subset \mathcal{O}$ de norma 2 que no sea principal. Para encontrarlo, notamos que

[9] Una inclusión $J = b\,I \subset \mathcal{O}$ equivale a $b\,\mathcal{O}_I \subset I^{-1}$. Pero $I^{-1} = \operatorname{nrd}(I)^{-1}\,\bar{I}$, donde $\bar{I}$ es el ideal que se obtiene conjugando los elementos de I (ver [39, Propo. 1.17] o el Corolario II.27 del presente trabajo). En consecuencia, vale $b\,I \subset \mathcal{O}$, si y sólo si $\mathcal{O}_I\left(\bar{b}\operatorname{nrd}(I)\right) \subset I$, ya que los órdenes son estables por tomar conjugado. Pero $q_I(\bar{b}\operatorname{nrd}(I)) = \operatorname{nrd}(b\,I)$ y dos representaciones $\mathcal{O}_I\,h = \mathcal{O}_I\,h'$ difieren en una unidad en $\mathcal{O}_I^\times$.

$\mathrm{nrd}(2) = \mathrm{nrd}(z-i) = 4$. Entonces, los ideales principales $2\,\mathcal{O}$ y $(i-z)\,\mathcal{O}$ tienen norma 4 y son distintos. Consideramos $I = 2\,\mathcal{O} + (z-i)\,\mathcal{O}$. Calculando los productos de $(z-i)$ contra los elementos de la base de $\mathcal{O}$ y ordenando los coeficientes, se puede corroborar que $I = \langle 1-zi, i+z, i-z, 1+zi\rangle$. En particular, $2\,\mathcal{O}, (z-i)\,\mathcal{O} \subset I \subset \mathcal{O}$, con inclusiones estrictas e $I \neq (1+i)\,\mathcal{O}$. Hemos encontrado dos ideales íntegros de norma 2 pertenecientes a clases distintas. La forma cuadrática asociada a I es

$$q_I(u,v,w,t) \;=\; 2\big(u^2+v^2+w^2+t^2\big) + uv - 2\,ut - 2\,vw - wt\;.$$

Debemos hallar $\left|\mathcal{O}_I^\times\right|$ y $n_I(2)$. En primer lugar, $n_I(2) = 12$. En cuanto a las unidades a izquierda, $\mathcal{O}_I = \langle 1, \tau, i-z, -i+z\rangle$, con $\tau = \frac{1+zi}{2}$. La forma cuadrática correspondiente está dada por

$$q_{\mathcal{O}_I} \;=\; u^2 + 4\left(v^2+w^2\right) + t^2 - uv + uw + ut - 4\,vw + wt\;.$$

El grupo de unidades tiene orden $\left|\mathcal{O}_I^\times\right| = 6$. Verificamos la igualdad

$$\frac{n_{\mathcal{O}}(2)}{\left|\mathcal{O}^\times\right|} + \frac{n_I(2)}{\left|\mathcal{O}_I^\times\right|} \;=\; 3$$

Esto no quiere decir que $[\mathcal{O}]$ y $[I]$ sean las únicas clases en $\mathrm{Cl}_{izq}\,(\mathcal{O})$. Para determinar el número de clases, recurrimos a la fórmula de masa:[10] si B ramifica en un único lugar finito, l, y $\mathcal{O}$ es un orden maximal, en este caso se debe cumplir que

$$\frac{l-1}{12} = \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\left|\mathcal{O}_i^\times : \mathbb{Z}^\times\right|}\;.$$

De esta igualdad (con $l = 11$) y habiendo determinado los órdenes $|\mathcal{O}^\times| = 4$ y $|\mathcal{O}_I^\times| = 6$, se deduce que $H = 2$ y un conjunto de representantes está dado por $\{[\mathcal{O}], [I]\}$.

En cuanto a los ideales íntegros de norma 2, sólo uno de ellos pertenece a $[\mathcal{O}]$ y la clase $[I]$ da cuenta de los otros dos ideales. Inmediatamente, deducimos que

$$B_2[\mathcal{O}] \;=\; [\mathcal{O}] + 2\,[I]\;,$$

donde $B_p = B_0(p)$ (no el álgebra sobre $\mathbb{Q}_p$). Para calcular el valor del operador B_2 en la clase $[I]$, basta con contar la cantidad de ideales principales de norma $2\,\mathrm{nrd}(I)$ contenidos en I, ya que sólo hay dos clases de equivalencia y el total de ideales de norma 2 contenidos en I es $2+1=3$. Pero

$$\#\Big\{J \subset I \;:\; \mathrm{nrd}(J) = 2\,\mathrm{nrd}(I),\; [J] = [\mathcal{O}]\Big\} \;=\; \frac{n_I(2)}{\left|\mathcal{O}^\times\right|}$$

[10]ver [38, Propo. 25], o [29, § 5] para el caso de un cuerpo de números

(los ideales contabilizados son $b\,\mathcal{O} \subset I$ con $\mathrm{nrd}(b) = 2\,\mathrm{nrd}(I)$ y $b\,\mathcal{O} = b'\,\mathcal{O}$, si y sólo si $b^{-1}b' \in \mathcal{O}^\times$). Según las cuentas realizadas anteriormente,

$$B_2[I] \;=\; 3\,[\mathcal{O}]\ .$$

Del cálculo de B_2 deducimos, además, que, para calcular B_p, con $p \neq 11$, basta con determinar el número de representación $n_{\mathcal{O}}(p)$, pues, en general, si $J = \mathcal{O}$ o $J = I$,

$$B_p[J] \;=\; \alpha\,[\mathcal{O}] + \beta\,[I]\ ,$$

donde $\alpha + \beta \,=\, p+1$, $\alpha \,=\, n_J(p)/|\mathcal{O}^\times|$ y, si $J \,=\, I$, $p+1 \,=\, \frac{n_{\mathcal{O}}(p)}{|\mathcal{O}^\times|} + \frac{n_I(p)}{|\mathcal{O}_I^\times|}$. Así, por ejemplo, usando la forma $q_{\mathcal{O}}$, calculamos $n_{\mathcal{O}}(p)$ para $p \leq 17$:

p	2	3	5	7	13	17
$n_{\mathcal{O}}(p)$	4	8	16	16	40	40

Esto nos permite expresar los operadores B_p para $p \leq 17$, $p \neq 11$, en la base $\{[\mathcal{O}], [I]\}$:

$$B_2 \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\ , \quad B_3 \,=\, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\ , \quad B_5 \,=\, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\ , \quad B_7 \,=\, \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\ ,$$
$$B_{13} \,=\, \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{17} \,=\, \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}\ .$$

La matriz B_2 tiene autovalores: 3 y -2, con autovectores $e_1 = \frac{1}{2}\,[\mathcal{O}] + \frac{1}{3}\,[I]$ y $f_1 = [I] - [\mathcal{O}]$, respectivamente. El espacio $\mathcal{S}_2^B\,(1)$ admite un producto interno (*producto interno de Petersson*), con respecto al cual las formas e_1 y f_1 son ortogonales (ver (V.2.6)). El espacio de formas cuspidales tiene dimensión 1 y f_1 es un generador. La forma f_1 es autofunción para los operadores $B_2, B_3, B_5, \ldots$ con autovalores $a_p = -2, -1, 1, \ldots$ Por la correspondencia de Jacquet-Langlands, el espacio $\mathcal{S}_2\,(11)^{11-\mathrm{new}}$ es de dimensión 1, generado por una autofunción para los operadores de Hecke con autovalores $\{a_p\}_{p\neq 11}$. Usando las relaciones para los operadores de Hecke, obtenemos los primeros términos para la correspondiente autoforma normalizada:

$$F_1 \,=\, q - 2\,q^2 - q^3 + 2\,q^4 + q^5 + 2\,q^6 - 2\,q^7 - 2\,q^9 - 2\,q^{10} + O(q^{11})\ .$$

Capítulo II

Preliminares

En esta sección repasamos algunos resultados de la teoría de álgebras de cuaterniones. Tomamos como referencia principal [48].

II.1. Álgebras de cuaterniones

Sea K un cuerpo. Sea B/K un espacio vectorial de dimensión cuatro con base $\{1, i, j, k\}$ y sean $a, b \in K \setminus \{0\}$. Bajo las relaciones $ji = k$, $1 \cdot h = h$ para todo $h \in B$,

$$i^2 \,=\, 1 \cdot a \quad , \quad j^2 \,=\, 1 \cdot b \quad \text{y} \quad ij \,=\, -ji \ ,$$

el espacio B se vuelve una K-álgebra. Si la característica de K es distinta de 2, un álgebra definida de esta manera es un *álgebra de cuaterniones sobre* K. En tal caso escribimos $B = (a, b)_K$. Toda álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo K es un álgebra central simple (sobre K); recíprocamente, toda álgebra central simple de dimensión cuatro sobre K es un álgebra de cuaterniones. De ahora en más, todo cuerpo será de característica cero, y esta descripción de las álgebras de cuaterniones será suficiente.[1]

Sea $B = (a, b)_K$ un álgebra de cuaterniones sobre el cuerpo K. La *conjugación* en B es la transformación K-lineal ι de B determinada por

$$\iota(x_1 + i\, x_2 + j\, x_3 + k\, x_4) \,=\, x_1 - i\, x_2 - j\, x_3 - k\, x_4 \ . \tag{II.1.1}$$

Denotamos el *conjugado* $\iota(h)$ de h en B por $\bar{h}$. La *norma reducida* de un elemento $b \in B$ se define como $\mathrm{nrd}(h) = h\bar{h}$ y su *traza reducida* es $\mathrm{trd}(h) = h + \bar{h}$. En coordenadas,

$$\mathrm{nrd}(h) \,=\, x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2 \quad \text{y} \quad \mathrm{trd}(h) \,=\, 2x_1 \ . \tag{II.1.2}$$

[1] Si la característica de K es 2, se obtiene un álgebra de cuaterniones imponiendo las relaciones

$$i^2 + i \,=\, 1 \cdot a \quad , \quad j^2 \,=\, 1 \cdot b \quad \text{y} \quad ij \,=\, j\,(i+1) \ .$$

En particular, $\mathrm{nrd}(h)$ y $\mathrm{trd}(h)$ son elementos del cuerpo K. Todo elemento $h \in B$ es solución de un polinomio cuadrático con coeficientes en K:

$$\mathsf{m}_h \;=\; X^2 - \mathrm{trd}(h)\,X + \mathrm{nrd}(h) \;=\; (X - h)\,(X - \bar{h}) \;,$$

su *polinomio minimal.*

Lema II.1. *Las unidades del álgebra B son, exactamente, los elementos de norma reducida no nula:*

$$B^\times \;=\; \big\{\mathrm{nrd} \neq 0\big\} \;.$$

Además, la restricción a $B^\times$ determina un morfismo de grupos $\mathrm{nrd} : B^\times \to K^\times$*, al que también se denomina* norma reducida*. Por otra parte, la traza reducida es una transformación K-lineal* $\mathrm{trd} : B \to K$ *y la aplicación*

$$\phi(h, h_1) \;=\; \mathrm{trd}(h h_1)$$

es una forma K-bilineal no degenerada.

Ejemplo II.2. El álgebra de matrices $B = \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ con coeficientes en un cuerpo K es un álgebra de cuaterniones sobre K. El cuerpo K se identifica con las matrices escalares $I \cdot a$. Dada un matriz $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, la adjunta de γ es la matriz

$$\gamma^\iota \;=\; \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \;.$$

Vale que $\gamma\gamma^\iota = \det(\gamma)$ y que $\gamma + \gamma^\iota = \mathrm{Tr}(\gamma)$. El polinomio característico de γ está dado por $(X - \gamma)\,(X - \gamma^\iota) = X^2 - \mathrm{Tr}(\gamma)\,X + \det(\gamma)$. En particular, γ y γ^ι poseen los mismos autovalores y son similares. Tomando

$$i \;=\; \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad j \;=\; \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \;,$$

se obtiene una estructura de álgebra de cuaterniones en el espacio de matrices.[2] Notamos que el conjugado, la norma reducida y la traza reducida se realizan, respectivamente, como la matriz adjunta, el determinante y la traza usuales.

Sea F/K una extensión finita de cuerpos y sea $B = (a, b)_K$ un álegbra de cuaterniones sobre K. Tomando producto tensorial sobre K, se obtiene un álgebra de cuaterniones sobre F: $B \otimes_K F = (a, b)_K \otimes_K F$. Denotamos este álgebra por B_F. Se cumple que $B_F = (a, b)_F$.

[2] Si la característica de K es 2, tomamos

$$i \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad j \;=\; \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \;.$$

II.2. Órdenes e ideales

Sean R un anillo de Dedekind, K su cuerpo de fracciones, B/K un álgebra de cuaterniones sobre K y V/K un espacio vectorial sobre K. Un *(R-)retículo* en V es un R-módulo $L \subset V$ finitamente generado. Un elemento $x \in V$ se dice *íntegro*, si $R[x]$ es un retículo. Un retículo $L \subset V$ se dice *completo*, si $L \otimes_R K = V$, si L contiene una K-base de V.

Proposición II.3. *Si $V = B$, $x \in B$ es íntegro, si y sólo si* $\mathrm{trd}(x), \mathrm{nrd}(x) \in R$.

Un retículo completo en B se denomina *ideal*. Un *orden* en B es un ideal $I \subset B$ que cumple $I \cdot I \subset I$ y $1 \in I$, es decir, un ideal que es, además, un subanillo (con unidad) de B. Todo elemento perteneciente a un orden es íntegro (R es noetheriano y los órdenes son finitamente generados).

Proposición II.4. *Un subconjunto $\mathcal{O} \subset B$ es un orden, si y sólo si $\mathcal{O}$ es subanillo de B, $R \subset \mathcal{O}$, los elementos de $\mathcal{O}$ son íntegros y $\mathcal{O} \cdot K = B$.*

Observación II.5. Sea $x \in \mathcal{O}$, un orden de B. En general, $x^{-1} = \bar{x}\, nrd(x)^{-1}$ y $\bar{x} \in \mathcal{O}$ (por II.3). Si $x \in \mathcal{O}^\times$, $x^{-1} \in \mathcal{O}$ y $\mathrm{nrd}(x)^{-1} \in R$. Recíprocamente, si $\mathrm{nrd}(x^{-1}) \in R$, $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Así, se deduce que $x \in \mathcal{O}^\times$, si y sólo si $\mathrm{nrd}(x) \in R^\times$.

Si $L, L' \subset V$ son retículos, $L \cap L'$ es un retículo. Si L' es completo, $\dim(L \cap L' \cdot K) = \dim(L \cdot K)$ (basta expresar los elementos de L como combinaciones lineales de una K-base de V contenida en L'). En particular, la intersección de dos ideales es un ideal y la intersección de dos órdenes es un orden. Un orden se dice *maximal*, si no está contenido propiamente en otro orden de B. Todo orden está contenido en algún orden maximal (por II.4). Un orden de la forma $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ con $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ maximales en B se denomina *orden de Eichler*.

II.2.1. Producto e inverso de ideales

Todo ideal $I \subset B$ tiene asociados dos órdenes:

$$\mathcal{O}_{izq}(I) = \left\{h \in B : h \cdot I \subset I\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_{der}(I) = \left\{h \in B : I \cdot h \subset I\right\},$$

su *orden a izquierda* y su *orden a derecha*. Los conjuntos $\mathcal{O}_{izq}(I)$ y $\mathcal{O}_{der}(I)$ son órdenes de B. Se dice que un ideal I es un *ideal a izquierda* de un orden $\mathcal{O}$, si $\mathcal{O}_{izq}(I) = \mathcal{O}$; análogamente, I se dice ser un *ideal a derecha* de $\mathcal{O}$, si $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}$; si $\mathcal{O}_{izq}(I) = \mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}$, se dice que I es un *($\mathcal{O}$-)ideal bilátero*.

Dados ideales $I, J \subset B$, el *producto de I con J* se define como el R-módulo generado por los porductos de la forma $a \cdot b$, $a \in I$, $b \in J$:

$$I \cdot J = \langle a \cdot b : a \in I, b \in J \rangle_R .$$

El producto de ideales es un ideal y la operación $(I, J) \mapsto I \cdot J$ es asociativa. Se dice que un producto $I \cdot J$ es *coherente*, si $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}_{izq}(J)$. El *(pseudo-)inverso* de un ideal I es el conjunto

$$I^{-1} \,=\, \left\{ h \in B \,:\, I\,h\,I \subset I \right\} \,.$$

Este conjunto es un ideal de B y se cumple que:

$$\mathcal{O}_{izq}(I^{-1}) \,\supset\, \mathcal{O}_{der}(I) \,\supset\, I^{-1}I \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_{der}(I^{-1}) \,\supset\, \mathcal{O}_{izq}(I) \,\supset\, II^{-1} \,. \tag{II.2.1}$$

Un ideal I se dice *invertible a derecha*, si existe un ideal J tal que el producto $I \cdot J$ es coherente y, además, $I \cdot J = \mathcal{O}_{izq}(I)$ y, en tal caso, decimos que J es un *inverso a derecha* de I; similarmente, I se dice *invertible a izquierda*, si existe un producto coherente $J \cdot I = \mathcal{O}_{der}(I)$; el ideal I se dice *invertible*, si existe un ideal J que es, a la vez, inverso a derecha e inverso a izquierda de I, es decir, tal que las inclusiones en (II.2.1) son igualdades, reemplazando I^{-1} por J. Un ideal es invertible, si y sólo si es invertible a derecha y a izquierda.

Un ideal se dice *normal*, si $\mathcal{O}_{izq}(I)$ y $\mathcal{O}_{der}(I)$ son maximales; se dice *íntegro*, si $I \subset \mathcal{O}_{izq}(I)$ e $I \subset \mathcal{O}_{der}(I)$; y se dice *principal*, si $I = h\mathcal{O}'$ e $I = \mathcal{O}h$, para cierto $h \in B$ (en ese caso, $\mathcal{O}_{izq}(I) = \mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}'$).

Observación II.6. Para garantizar que un ideal I es, respectivamente, principal o íntegro, es suficiente verificar sólo una de las dos correspondientes condiciones. Si $h \in B$ y $\mathcal{O} \subset B$, $\mathcal{O}h = h\mathcal{O}'$, donde $\mathcal{O}' = h^{-1}\mathcal{O}h$, el orden a izquierda de este ideal es $\mathcal{O}$ y su orden a derecha es $\mathcal{O}'$. Si $I \subset \mathcal{O}_{izq}(I)$, $I \cdot I \subset I$ e $I \subset \mathcal{O}_{der}(I)$, y viceversa. Lo mismo es cierto en cuanto a la propiedad de un ideal de ser normal: $\mathcal{O}_{der}(I)$ es maximal, si y sólo si $\mathcal{O}_{izq}(I)$ es maximal.[3]

II.2.2. El diferente

La *norma reducida* de un ideal $I \subset B$ es el ideal de K generado por las normas reducidas de los elementos de I:

$$\mathrm{nrd}(I) \,=\, \langle \mathrm{nrd}(x) \,:\, x \in I \rangle_R \,\subset\, K \,.$$

Esto define un ideal fraccionario de K: si $\{\alpha_k\}_k$ es una R-base de I y $x = \sum_k a_k\alpha_k \in I$,

$$\mathrm{nrd}(x) \,=\, \sum_{i<j} a_i a_j \left(\mathrm{nrd}(\alpha_i + \alpha_j) - \mathrm{nrd}(\alpha_i) - \mathrm{nrd}(\alpha_j) \right) \,+\, \sum_k (a_k)^2 \,\mathrm{nrd}(\alpha_k)$$

y, entonces, $\mathrm{nrd}(x)$ es una combinación R-lineal de las finitas normas reducidas $\mathrm{nrd}(\alpha_k)$ y $\mathrm{nrd}(\alpha_i + \alpha_j)$. La traza reducida, por otra parte, permite definir el *dual* de un ideal.

[3] [11, Satz 12, § 2]

Como hemos mencionado (Lema II.1), la aplicación $\phi:\ B\times B\to K$ dada por $\phi(h,h_1)=\operatorname{trd}(hh_1)$ es una forma bilineal no degenerada. El dual de un ideal I es el conjunto

$$I^* \,=\, \big\{x\in B\,:\,\operatorname{trd}(x\cdot I)\subset R\big\}\ .$$

Este conjunto es un ideal. Por la ciclicidad de la traza, $I\subset(I^*)^*$ y, dado que I^* contiene a la base dual respecto de ϕ de una base en I, vale que $(I^*)^*\subset I$. Es decir, $(I^*)^*=I$. En particular,

$$\mathcal{O}_{izq}(I^*) \,=\, \mathcal{O}_{der}(I)\ . \tag{II.2.2}$$

Observación II.7. Para todo par de ideales I,J de B, vale que

$$(I\cdot J)^* \,=\, \big\{x\in B\,:\,xI\subset J^*\big\} \,=\, \big\{x\in B\,:\,Jx\subset I^*\big\}\ .$$

Si $\mathcal{O}\subset B$ es un orden, su *diferente* es el ideal $(\mathcal{O}^*)^{-1}$ de B. De la igualdad (II.2.2) y de la expresión (II.2.1), con $\mathcal{O}^*$ en lugar de I, se deduce que

$$\mathcal{O}\,\subset\,\mathcal{O}_{izq}\big((\mathcal{O}^*)^{-1}\big)\,\cap\,\mathcal{O}_{der}\big((\mathcal{O}^*)^{-1}\big)\ .$$

Esto quiere decir que el diferente es estable por multiplicación por elementos del mismo orden a ambos lados. Dado que $1\in\mathcal{O}^*$, se verifica también que $(\mathcal{O}^*)^{-1}\subset\mathcal{O}$ y, en particular, el diferente de un orden es un ideal íntegro.

La definición del ideal diferente es válida para cualquier ideal. Dado un ideal I de B, d_I denota el ideal en el cuerpo K definido como la norma reducida del ideal $(I^*)^{-1}$:

$$\mathrm{d}_I \,=\, \operatorname{nrd}\big((I^*)^{-1}\big)\ .$$

Si $I=\mathcal{O}$ es un orden, lo llamamos *discriminante (reducido) de* $\mathcal{O}$. El discriminante proporciona una manera de determinar si un orden es maximal.

Proposición II.8. *Sean $\mathcal{O},\mathcal{O}'\subset B$ dos órdenes. Entonces $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}'$ implica $\mathrm{d}_{\mathcal{O}}\subset\mathrm{d}_{\mathcal{O}'}$. Si,* además, *$\mathrm{d}_{\mathcal{O}}=\mathrm{d}_{\mathcal{O}'}$, entonces $\mathcal{O}=\mathcal{O}'$.*

II.2.3. Ideales principales

Sea $I=\mathcal{O}h$ un ideal principal de B y sea $\mathcal{O}'=h^{-1}\mathcal{O}h$ su orden a derecha. Entonces

$$I^{-1} \,=\, h^{-1}\mathcal{O} \,=\, \mathcal{O}'h^{-1}\ .$$

En particular, I es invertible. Si $I'=\mathcal{O}'h'$, entonces

$$I\cdot I' \,=\, \mathcal{O}hh' \,=\, hh'\mathcal{O}''\ ,$$

donde $\mathcal{O}'' = (h')^{-1}\mathcal{O}'h'$. En general, el producto coherente de ideales principales es principal y sea cumple

$$\mathcal{O}_{izq}(IJ) = \mathcal{O}_{izq}(I) \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_{der}(IJ) = \mathcal{O}_{der}(J) \ .$$

El pseudoinverso de un ideal principal también es principal y es un verdadero inverso.

La norma reducida de un ideal principal $I = \mathcal{O}h$ es el ideal principal

$$\mathrm{nrd}(I) = R\,\mathrm{nrd}(h)$$

en el cuerpo K. El inverso de un ideal principal I se puede escribir en términos de su norma reducida:

$$I^{-1} = \overline{I}\,\mathrm{nrd}(I)^{-1} \ ,$$

donde $\overline{I} = \big\{\bar{x} \,:\, x \in I\big\}$. Si $J = \mathcal{O}'h'$, de manera que IJ sea coherente, entonces

$$\mathrm{nrd}(IJ) = \mathrm{nrd}(I)\,\mathrm{nrd}(J) \ .$$

II.2.4. Ideales invertibles

Sea I un ideal invertible a derecha con inverso (a derecha) J. Por definición del pseudo inverso, como $IJI = \mathcal{O}_{izq}(I)\,I = I$, vale que $J \subset I^{-1}$. Pero también, como $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}_{izq}(J)$,

$$I^{-1} = I^{-1}\,(IJ) = (I^{-1}I)\,J \subset J \ .$$

Entonces debe ser $J = I^{-1}$. En particular, I es invertible a derecha, si y sólo si $I \cdot I^{-1}$ es un producto coherente y vale $I \cdot I^{-1} = \mathcal{O}_{izq}(I)$. En tal caso, I^{-1} es su único inverso a derecha. La afirmación análoga acerca de la invertibilidad a izquierda también es cierta. En particular, I es invertible, si y sólo si las inclusiones en (II.2.1) son *todas* igualdades.

Sean $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ dos órdenes en B y sean I y J dos ideales de B tales que $\mathcal{O}_{izq}(I) = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{der}(J) = \mathcal{O}'$ y que IJ sea coherente. En general, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{izq}(IJ)$. Si asumimos que J es invertible a derecha, entonces

$$x\,I = x\,I\,(JJ^{-1}) \subset IJJ^{-1} = I \ ,$$

para todo $x \in \mathcal{O}_{izq}(IJ)$. Se deduce que $\mathcal{O}_{izq}(IJ) = \mathcal{O}$. Un argumento análogo muestra que, si I es invertible a izquierda, entonces $\mathcal{O}_{der}(IJ) = \mathcal{O}'$.

Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, entonces podemos definir un grupo, el *grupo de $\mathcal{O}$-ideales biláteros e invertibles*. Denotamos este grupo por $\mathcal{I}\,(\mathcal{O})$. Como ya hemos mencionado, los ideales principales son invertibles y sus inversos son principales y el producto de dos ideales principales es principal, con lo que podemos definir el *subgrupo de ideales principales*, $\mathcal{P}\,(\mathcal{O}) \leq \mathcal{I}\,(\mathcal{O})$. En general, si $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}'$, no hay estructura de grupo y obtenemos un *grupoide* considerando todos los conjuntos $\mathcal{I}\,(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ de ideales invertibles cuyo orden a izquierda es $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ a derecha.

Observación II.9. Sea $\mathcal{O}$ un orden y sea I un ideal a izquierda de $\mathcal{O}$. El producto $I \cdot I^*$ es coherente y se cumple, por la Observación II.7, que $(I \cdot I^*)^* = \mathcal{O}$. Dualizando, $I \cdot I^* = \mathcal{O}^*$. Si, ahora, $\mathcal{O}^*$ es invertible a derecha, entonces vale que

$$I \cdot \left(I^* \, (\mathcal{O}^*)^{-1}\right) \, = \, \mathcal{O} \; ,$$

con todos los productos coherentes. Es decir, todos los ideales I tales que $\mathcal{O}_{izq}(I) = \mathcal{O}$ son invertibles a derecha y sus inversos están dados por $I^{-1} = I^* \, (\mathcal{O}^*)^{-1}$.

Cuando el orden es maximal todos los ideales resultan ser invertibles.

Proposición II.10. *Sea $\mathcal{O}$ un orden maximal. Si I es un ideal a izquierda de $\mathcal{O}$, entonces I es invertible a derecha. Es decir, el producto $I \cdot I^{-1} = \mathcal{O}$ es coherente.*

Demostración. El producto $I \cdot I^{-1}$ es compatible, por maximalidad de $\mathcal{O}$ y II.2.1. Si denotamos por A este ideal, entonces A es un $\mathcal{O}$-ideal bilátero, normal e íntegro. Por definición, $AA^{-1} \subset \mathcal{O}$ y, por lo tanto, $(AA^{-1})\, I = I$. Esto quiere decir que $I^{-1}A^{-1} \subset I^{-1}$ y, entonces, $A^{-1} \subset \mathcal{O}_{der}(I^{-1}) = \mathcal{O}$, por maximalidad. Pero $A, A^{-1} \subset \mathcal{O}$ sólo puede suceder si $A = \mathcal{O}$.[4] □

Corolario II.11. *Si I es un ideal normal, entonces I es invertible.*

II.3. Álgebras de cuaterniones sobre cuerpos locales

II.3.1. Clasificación local

En general, un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo, o bien es isomorfa a un álgebra de matrices, o bien es de división. Todo anillo de división con una cantidad finita de elementos es conmutativo; sobre un cuerpo finito, entonces, toda álgebra de cuaterniones es isomorfa al álgebra de matrices con coeficientes en el cuerpo. Sobre el cuerpo de números complejos –o, en general, sobre un cuerpo separablemente cerrado– existe, también, una única clase de isomorfismo de álgebras de cuaterniones.

Toda álgebra de división real, no conmutativa y de dimensión finita es isomorfa al álgebra de cuaterniones de Hamilton, $\mathbb{H} = (-1,-1)_{\mathbb{R}}$. Hay, entonces, exactamente dos clases de isomorfismo de álgebras de cuaterniones reales: la clase del álgebra de matrices $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y la clase de las álgebras de división, representadas por $\mathbb{H}$. Esto es cierto bien en general.

Teorema II.12 (Clasificación local)**.** *Sea K un cuerpo local distinto de $\mathbb{C}$. Entonces existe una única álgebra de cuaterniones de división, salvo isomorfismo.*

[4][11, Satz 6, § 2]

II.3.2. Órdenes e ideales sobre cuerpos locales no arquimedianos

En esta sección asumimos que K es un cuerpo local. Como antes, denotamos por R su anillo de enteros y fijamos un álgebra de cuaterniones B/K. Dividiremos la descripción en dos casos: B es isomorfa a un álgebra de matrices, o bien B es de división. Pero antes hacemos una observación válida en ambos.

Sabemos que, si un ideal I es principal, entonces es invertible. Sobre un cuerpo local estas dos nociones coinciden.

Proposición II.13 ([28, Thm. 2]). *Sea B un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo local. Si I es un ideal invertible de B, entonces I es principal. En particular, $\mathcal{O}_{der}(I)$ y $\mathcal{O}_{izq}(I)$ son conjugados.*

Es decir, en las álgebras de cuaterniones sobre un cuerpo local, $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \mathcal{P}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$, para todo par de órdenes; además, $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \neq \varnothing$ implica $\mathcal{O} = h\mathcal{O}'h^{-1}$ para cierto $h \in B$. En general, dados órdenes $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ de B, $I = \mathcal{O} \cdot \mathcal{O}'$ es un ideal. Si dichos órdenes son maximales, entonces $I \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$. Esto demuestra el siguiente corolario.

Corolario II.14. *Sea B un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo local. Si $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ son órdenes maximales en B, entonces son conjugados.*

Llamamos *discriminante reducido de B/K* al ideal d_B de K igual al discriminante reducido de cualquiera de sus órdenes maximales:

$$\mathrm{d}_B = \mathrm{d}_{\mathcal{O}} .$$

Por el Corolario II.14, este ideal está bien definido.

En lo que resta de esta sección, suponemos que K es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ y elegimos un uniformizador local, al cual también denotaremos por p. Sea R su anillo de enteros y sea $P = R\,p$ el único ideal maximal.

$B \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$

Sea V/K un espacio vectorial de dimensión 2. Eligiendo una base de V, B se identifica con el álgebra de endomorfismos de V, $\mathrm{End}(V)$. Bajo esta identificación, los órdenes maximales de B son de la forma $\mathrm{End}_R(L)$, donde L es un retículo completo de V. En particular, todos los órdenes maximales de B son conjugados al orden

$$\begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix} = \mathrm{M}_{2\times 2}(R) ,$$

cuyo discriminante reducido es igual a $\mathrm{d}_{\mathrm{M}_{2\times 2}(R)} = R$.

Sea $L \subset V$ un retículo. Si $x \in K^{\times}$, se cumple que $\mathrm{End}_R(xL) = \mathrm{End}_R(L)$. Si L' es un retículo completo, porque L es finitamente generado y L' contiene una K-base de V, existe $D \in R$ tal que $D \cdot L \subset L'$. Supongamos, entonces, que $L \subset L'$ y que ambos son completos. Existen una R-base $\{f', g'\}$ de L' y enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\{f'p^a, g'p^b\}$ es una R-base de L. En la dirección opuesta, si $\{f, g\}$ es una R-base de L, existe una única R-base de L' de la forma $\{fp^m, fr + gp^n\}$, con m, n enteros y r perteneciente a un sistema de representantes de $R/R\,p^n$ dado. De esto se deduce que los ideales a izquierda de $\mathrm{M}_{2\times 2}(R)$ e íntegros son los ideales de la forma

$$\mathrm{M}_{2\times 2}(R) \begin{bmatrix} p^m & r \\ & p^n \end{bmatrix} ,$$

donde $m, n \geq 0$ y r pertenece a un sistema de representantes de $R/R\,p^n$ dado. Todos estos ideales son distintos y, en paritcular, la cantidad de ideales de norma reducida igual a $R\,p$ es $1 + |R/R\,p|$.

Sean $\mathcal{O} = \mathrm{End}_R(L)$ y $\mathcal{O}' = \mathrm{End}_R(L')$ dos órdenes maximales. Asumiendo que $L \subset L'$, existen bases $\{f', g'\}$ y $\{f'p^a, g'p^b\}$ de L' y de L, respectivamente. La *distancia* entre $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ es

$$\mathrm{dist}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') := |b - a| .$$

El *nivel* del orden de Eichler $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ es la distancia $\mathrm{dist}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ entre los órdenes maximales.

Proposición II.15. *Sea $\mathcal{O}$ un orden de $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$. Las propiedades siguientes son equivalentes: (i) existe un único par $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de órdenes maximales tales que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$; (ii) $\mathcal{O}$ es de Eichler; (iii) existe un único entero $e \geq 0$ tal que $\mathcal{O}$ es conjugado a*

$$\begin{bmatrix} R & R \\ R\,p^e & R \end{bmatrix} . \tag{II.3.1}$$

El entero e en la proposición anterior es igual al nivel del orden de Eichler $\mathcal{O}$. Decimos también que el nivel de $\mathcal{O}$ es $R\,p^e$. Se verifica que el discriminante reducido del orden (II.3.1) es $R\,p^e$. A este orden en $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ lo llamamos *orden de Eichler estándar de nivel $R\,p^e$* y lo denotamos $\mathcal{O}_0(R\,p^e)$. En general, el discriminante reducido de un orden de Eichler de nivel $R\,p^e$ en B es $R\,p^e$.

$B \not\simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$

La valuación v en K se extiende a una valuación en B componiendo con la norma reducida. Si $v:\, K^\times \to \mathbb{Z}$ con $v(p) = 1$, definimos $w:\, B^\times \to \mathbb{Z}$ por

$$w = v \circ \mathrm{nrd} .$$

que es una valuación discreta en B. Como $\mathrm{nrd} : B^\times \to K^\times$ es sobreyectiva,[5] existe $\pi \in B^\times$ cuya norma reducida es igual a $\mathrm{nrd}(\pi) = p$. Entonces, si

$$\mathcal{O} := \{w \geq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P} := \{w > 0\} ,$$

el único orden maximal de B es $\mathcal{O}$, cuyo único ideal bilátero e íntegro maximal es $\mathcal{P}$, que es principal ($\mathcal{P} = \mathcal{O}\pi = \pi\mathcal{O}$). Hay un único orden de Eichler y es igual a $\mathcal{O}$. Todo $\mathcal{O}$-ideal a izquierda es un $\mathcal{O}$-ideal a derecha y, por lo tanto, bilátero. Los ideales de $\mathcal{O}$ (a derecha o a izquierda) son todos de la forma $\mathcal{P}^i$ con $i \in \mathbb{Z}$ y, en particular, son todos principales. Además, $(\mathcal{O}^*)^{-1} = \mathcal{P}$ y $\mathrm{d}_{\mathcal{O}} = \mathrm{nrd}(\mathcal{P}) = R\,p$.

II.4. Grupos en los adèles

En esta sección repasamos las definiciones del anillo de adèles y del grupo de idèles de un cuerpo de números y algunas construcciones relacionadas. Aprovechamos también para indicar la notación que se utilizará en el resto del trabajo.

Sea V un conjunto de índices y, para cada $v \in V$, sea G_v un grupo. Si además contamos con un subconjunto finito $S \subset V$ y, para cada $v \notin S$, con un subgrupo $C_v \leq G_v$, podemos definir el *producto restringido* de los G_v respecto de los C_v:

$$G = \Big\{(x_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} G_v \,:\, x_v \in C_v \text{ para casi todo } v \in V \smallsetminus S\Big\} .$$

Denotaremos este grupo por $\prod'_v G_v$, cuando no sea necesario mencionar explícitamente el conjunto de lugares S y la familia de subgrupos C_v. Decimos que una propiedad se cumple para casi todo elemento de un conjunto, si se cumple para todos los elementos salvo posiblemente finitos de ellos. En los casos que nos interesan, los grupos G_v son grupos topológicos localmente compactos y, cuando están dados, los subgrupos C_v son abiertos y compactos. En este caso, el producto restringido G tiene estructura de grupo topológico localmente compacto. Una base de entornos del elemento neutro está dada por los subconjuntos de la forma $\prod_{v\in V} U_v$, donde cada U_v es abierto con clausura compacta y $U_v = C_v$, para casi todo v. Los conjuntos de índices V y S son, más aun, $V = V^K$, el conjunto de lugares de un cuerpo de números $K/\mathbb{Q}$, y $S \subset V^K$ un subconjunto finito de lugares que contiene los lugares arquimedianos.

Fijemos $K/\mathbb{Q}$ un cuerpo de números. Denotamos por $\mathfrak{o}_K$ su anillo de enteros y por V^K el conjunto de lugares de K. Escribimos V_f^K y V_∞^K para referirnos, respectivamente, al subconjunto de lugares finitos, o no arquimedianos, correspondientes a los primos de $\mathfrak{o}_K$, y al subconjunto de lugares infinitos, o arquimedianos. Si $v \in V^K$, denotamos la completación de K en v por K_v. Si $v \in V_f^K$, denotamos el orden maximal en K_v por

[5] [53, Ch. X § 2]

$\mathfrak{o}_{K,v}$, compuesto por los elementos de módulo menor o igual a 1. Si S es un subconjunto finito de lugares de K que contiene a V_∞^K, el *anillo de S-enteros* está definido por

$$\mathfrak{o}_K(S) \;=\; \bigcap_{v\notin S} \left(K \cap \mathfrak{o}_{K,v}\right) \;.$$

Este conjunto es un subanillo de K y un dominio de Dedekind. Si $S = V_\infty^K$, entonces $\mathfrak{o}_K(S) = \mathfrak{o}_K$.

Definición II.16. El *anillo de adèles de K*, denotado $\mathbb{A}_K$, es el producto restringido determinado por $S = V_\infty^K$, $G_v = K_v$ y $C_v = \mathfrak{o}_{K,v}$. Es un anillo topológico. El *grupo de idèles de K*, denotado $\mathbb{A}_K^\times$, es el grupo topológico que se obtiene tomando $S = V_\infty^K$, $G_v = K_v^\times$ y $C_v = \mathfrak{o}_{K,v}^\times$. Es igual al grupo de unidades de $\mathbb{A}_K$ (como conjunto).

Sea B/K un álgebra de cuaterniones sobre K. Dado $v \in V^K$, se obtiene un álgebra de cuaterniones sobre la completación K_v extendiendo escalares:

$$B_v \;=\; B \otimes_K K_v \;.$$

Sea $S \subset V^K$ un subconjunto finito de lugares de K que contiene V_∞^K y sea $\mathcal{O} \subset B$ un $\mathfrak{o}_K(S)$-orden del álgebra. Si $v \in V_f^K \smallsetminus S$, entonces

$$\mathcal{O}_v \;=\; \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{o}_K(S)} \mathfrak{o}_{K,v}$$

define un ($\mathfrak{o}_{K,v}$-)orden en B_v.

Definición II.17. El *anillo de adèles de B*, denotado $\mathbb{A}_B$, es el producto restringido de $G_v = B_v$ respecto de $C_v = \mathcal{O}_v$ (definidos para $v \notin S$). Esta definición no depende del conjunto finito S (siempre que contenga V_∞^K), ni del orden $\mathcal{O}$ elegidos; se verifica que

$$\mathbb{A}_B \;=\; B \otimes_K \mathbb{A}_K \;.$$

El *grupo de idèles de B*, denotado $\mathbb{A}_B^\times$, es el producto restringido que se obtiene eligiendo $G_v = B_v^\times$ y $C_v = \mathcal{O}_v^\times$. Es un grupo topológico y el grupo de unidades de $\mathbb{A}_B$.

En general, si $V = V^K$, $S \supset V_\infty^K$ es un subconjunto finito, $\{G_v \,:\, v \in V^K\}$ es una familia de grupos indexada por los lugares de K y $\{C_v \,:\, v \notin S\}$ es una familia de subgrupos, entonces el producto restringido se descompone como producto de una parte arquimediana y una parte no arquimediana:

$$G \;=\; G_\infty \times \widehat{G} \;,$$

donde $G_\infty = \prod_{v\in V_\infty^K} G_v$ y $\widehat{G} = \prod'_{v\in V_f^F} G_v$ es el producto restringido de $\{G_v : v \in V_f^K\}$ respecto de $\{C_v : v \in V_f^K \smallsetminus S\}$. Con respecto a los ejemplos anteriores, usaremos la siguiente notación:

$$\mathbb{A}_X = X_\infty \times \widehat{X} \qquad \text{y} \qquad \mathbb{A}_X^\times = X_\infty^\times \times \widehat{X}^\times ,$$

donde $X = K$ o B. Si $S \subset V^K$ es un subconjunto finito que contiene los lugares arquimedianos, entonces

$$\widehat{\mathfrak{o}_K(S)} = \prod_{v\in V_f^K \smallsetminus S} \mathfrak{o}_{K,v} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\mathfrak{o}_K(S)}^\times = \prod_{v\in V_f^K \smallsetminus S} \mathfrak{o}_{K,v}^\times$$

definen, respectivamente, un subanillo compacto de $\widehat{K}$ y su grupo de unidades, también un subgrupo compacto de $\widehat{K}^\times$ con la topología heredada de los idèles. Análogamente,

$$\widehat{\mathcal{O}} = \prod_{v\in V_f^K \smallsetminus S} \mathcal{O}_v = \mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{o}_K(S)} \widehat{\mathfrak{o}_K(S)} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\mathcal{O}}^\times = \prod_{v\in V_f^K \smallsetminus S} \mathcal{O}_v^\times$$

definen un subanillo compacto de $\widehat{B}$ y su grupo de unidades, que es un subgrupo compacto en $\widehat{B}^\times$.

II.5. Álgebras de cuaterniones sobre un cuerpo de números

Sean $K/\mathbb{Q}$ un cuerpo de números, $S \subset V^K$ un subconjunto finito de lugares que contiene V_∞^K, E/K un K-espacio vectorial de dimensión finita y $L \subset E$ un $\mathfrak{o}_K(S)$-retículo. Para cada lugar $v \in V^K$, sean

$$E_v = E \otimes_K K_v \qquad \text{y} \qquad L_v = L \otimes_{\mathfrak{o}_K(S)} \mathfrak{o}_{K,v}$$

el espacio vectorial sobre la completación K_v determinado por extensión de escalares y, respectivamente, el $\mathfrak{o}_{K,v}$-retículo en E_v generado por L, su clausura (L_v sólo está definido para $v \in V_f^K \smallsetminus S$). Si M_v es un retículo en E_v, decimos que M_v es un *retículo local*. Para enfatizar que L es un retículo en el espacio sobre K, decimos que L es un *retículo global*. Si $x \in E$, denotamos por x_v su imagen en E_v, es decir, $x_v = x \otimes 1$.

Proposición II.18. *Sea E/K un espacio vectorial sobre K y sean L_0 y L retículos en E. Entonces*

(i) $L = \bigcap_{v\in V_f^K \smallsetminus S} E \cap L_v$ *y*

(ii) $L_v = L_{0,v}$ *para casi todo* $v \in V_f^K \smallsetminus S$.

Además, (iii) si $\{M_v\}_{v\in V_f^K \smallsetminus S}$ es una familia de retículos locales tales que $M_v = L_{0,v}$ para casi todo v, existe un (único) retículo global $L' \subset E$ tal que $L'_v = M_v$ para todo $v \in V_f^K \smallsetminus S$.

II.5.1. El teorema de clasificación

Sea B/K un álgebra de cuaterniones sobre K. Dado $v \in V^K$, se dice que B *ramifica en* v, si el álgebra de cuaterniones B_v/K_v pertenece a la clase de las álgebras de división. El *conjunto de ramificación de* B es el conjunto de lugares v de K en donde B ramifica. Denotamos este conjunto por $\mathrm{Ram}(B)$.

Observación II.19. El conjunto $\mathrm{Ram}(B)$ es un conjunto finito. Sea L el retículo en B generado por una K-base. Entonces L es un retículo completo. Por la Proposición II.18, para casi todo lugar finito v, el retículo local L_v debe ser igual a un orden maximal en la correspondiente álgebra B_v. Por otro lado, el ideal discriminante reducido $\mathrm{d}_L \subset K$ es un retículo completo en K y, por lo tanto, $(\mathrm{d}_L)_v = \mathfrak{o}_{K,v}$ (el orden maximal) para casi todo v. Entonces, el discriminante del álgebra B_v es $\mathrm{d}_{B_v} = \mathrm{d}_{L_v} = \mathfrak{o}_{K,v}$ para casi todo v. En definitiva, por lo visto en la Sección II.3.2, $B_v \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(K_v)$, salvo, posiblemente, en finitos lugares.

El *discriminante reducido de* B/K, denotado por d_B, se define como el producto de los ideales primos correspondientes a los lugares finitos en donde B ramifica. Se cumple

$$\mathrm{d}_B = \prod_{v \in \mathrm{Ram}(B) \cap V_f^K} \mathfrak{p}_v = \bigcap_{v \in V_f^K} \left(K \cap \mathrm{d}_{B_v}\right) ,$$

o, lo que es lo mismo, $(\mathrm{d}_B)_v = \mathrm{d}_{B_v}$.

Teorema II.20 (Clasificación global)**.** *El cardinal del conjunto* $\mathrm{Ram}(B)$ *es par. Si* S *es un subconjunto de lugares de* K *de cardinal par, existe, salvo isomorfismo, una única álgebra de cuaterniones cuyo conjunto de ramificación es* S.

En particular, el teorema de clasificación nos dice que dos álgebras de cuaterniones sobre un cuerpo de números son isomorfas, si y sólo si son isomorfas localmente.

II.5.2. El teorema de la norma

Se dice que B es *indefinida*, si B ramifica en algún lugar arquimediano. Si B_v es de división para todo $v \in V_\infty^K$, se dice que B es *(totalmente) definida* (esto último solamente es posible cuando $K/\mathbb{Q}$ es totalmente real).

Teorema II.21. *La imagen del morfismo* $\mathrm{nrd} : B^\times \to K^\times$ *es*

$$\mathrm{nrd}(B^\times) = K^\times_{(+)} = \left\{ x \in K \,:\, x_v > 0 \text{ , } si\ v \in V_\infty^K \cap \mathrm{Ram}(B) \right\} .$$

Si $K/\mathbb{Q}$ es una extensión totalmente real, un elemento $x \in K$ es *totalmente positivo*, si $x_v > 0$ para todo lugar arquimediano $v \in V_\infty^K$. Escribimos $x \gg 0$ para indicar que x es totalmente positivo y denotamos por $K_+^\times = \{x \in K^\times \,:\, x \gg 0\}$ el subgrupo de elementos totalmente positivos de K. Dada un álgebra de cuaterniones B/K, los elementos cuya norma reducida es totalmente positiva conforman un subgrupo que denotamos por $B_+^\times = \{\gamma \in B^\times : \mathrm{nrd}(\gamma) \gg 0\}$.

Observación II.22. Si el grado de la extensión $K/\mathbb{Q}$ es igual a $n = [K : \mathbb{Q}]$ y B/K ramifica en $n - r$ lugares arquimedianos, entonces $B_\infty \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{n-r}$ y

$$B^\times/B_+^\times \simeq K_{(+)}^\times/K_+^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r ,$$

vía la norma reducida.

II.5.3. Aproximación fuerte

Sea $S \subset V^K$ un subconjunto finito. Sea B^1 el subgrupo de $B^\times$ de elementos de norma reducida uno, sea B_v^1 el subgrupo correspondiente en $B_v^\times$ y sea $B_S^1 := \prod_{v\in S} B_v^1$. Cada B_v^1 es compacto, si y sólo si B ramifica en v y B_S^1 es compacto, si y sólo si $S \subset \mathrm{Ram}(B)$. Dado un orden $\mathcal{O} \subset B$, sean $\mathcal{O}^1 = \mathcal{O}^\times \cap B^1$, $\mathcal{O}_v^1 = \mathcal{O}_v^\times \cap B_v^1$ y $\mathbb{A}_B^1$ el producto restringido de los grupos B_v^1 respecto de los subgrupos compactos $\mathcal{O}_v^1$ (siempre que estén definidos).

Teorema II.23 (de aproximación fuerte, [48, Théorème III.4.3])**.** *Sea $S \subset V^K$ un subconjunto finito que contiene al menos un lugar arquimediano. Entonces, si B_S^1 no es compacto, $B^1 \cdot B_S^1$ es denso en $\mathbb{A}_B^1$.*

De ahora en adelante, tomamos $S = V_\infty^K$. Entonces B_S^1 es compacto, si y sólo si B es totalmente definida.

II.6. Propiedades locales

Dado $X \subset B$, decimos que X satisface una propiedad *localmente*, si todas las clausuras X_v, $v \in V_f^K$, tienen la propiedad correspondiente.

Observación II.24. Un elemento $x \in B$ es íntegro, si y sólo si, para todo lugar finito v, $x_v \in B_v$ es íntegro.

Proposición II.25. *Las propiedades de un retículo de ser un ideal (retículo completo) o de ser un orden son propiedades locales. En consecuencia, también lo son las propiedades de ser un orden maximal o de ser un orden de Eichler.*

Demostración. Sea L un retículo en B tal que $L_v \subset B_v$ posee un conjunto generador de B_v sobre K_v. Dado un elemento $h \in B$, si h_v denota su imagen en B_v, se cumple que $h_v \in L_v$ para todo lugar v, salvo, posiblemente, una cantidad finita. Sea $S \subset V_f^K$ el conjunto conformado por dichos lugares. Aun si $h_w \notin L_w$, existe $D_w \in \mathfrak{o}_{K,w}$ tal que

$D_w h_w \in L_w$. Como cada retículo L_w es abierto en B_w, por densidad, existe $D \in K$ tal que $D\,h \in L_w$. Entonces $D\,h$ (o un múltiplo) pertenece a $\bigcap_{v\in V_f^K} \big(B \cap L_v\big) = L$.

Sea $I \subset B$ un retículo tal que, para cada lugar finito v, I_v es un orden en B_v. Por el párrafo anterior, I contiene una K-base de B. Por la Observación II.24, los elementos de I son íntegros. Dado que también se cumple $I_v \supset \mathfrak{o}_{K,v} \supset \mathfrak{o}_K$ para todo v, el retículo I contiene a $\mathfrak{o}_K$. Finalmente, $I \cdot I \subset I_v$ para todo v implica $I \cdot I \subset I$ y, por la Proposición II.4, I es un orden.

Sea $\mathcal{O}$ un orden en B tal que $\mathcal{O}_v$ es maximal para todo lugar finito v y $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$ es un orden, entonces $\mathcal{O}'_v = \mathcal{O}_v$ para todo v y $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Sea $\mathcal{O}$ un orden de B. Sea $\mathcal{O}'$ un orden maximal que lo contiene. Supongamos que, para cada lugar finito v, existen órdenes maximales tales que $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{1,v} \cap \mathcal{O}_{2,v}$, entonces, para casi todo v,

$$\mathcal{O}_v \;=\; \mathcal{O}_{1,v} \;=\; \mathcal{O}_{2,v} \;=\; \mathcal{O}'_v$$

y, en particular, existen órdenes $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de B tales que $(\mathcal{O}_i)_v = \mathcal{O}_{i,v}$. Además, por unicidad, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. □

Proposición II.26. *Sea I un ideal de B y sea $v \in V_f^K$ un lugar finito. Entonces*

$$\mathcal{O}_{izq}(I_v) \;=\; \mathcal{O}_{izq}(I)_v \quad , \quad (I_v)^* \;=\; (I^*)_v \quad , \quad \mathrm{nrd}(I_v) \;=\; \mathrm{nrd}(I)_v \ .$$

Si J es otro ideal de B, $I \cdot J$ es un producto coherente, si y sólo si $I_v \cdot J_v$ lo es para todo v. Si, además, I es invertible, entonces $I_v J_v = (IJ)_v$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{nrd}(I_v) = \mathrm{nrd}(I)_v$. Sea $\{\alpha_k\}_k$ un conjunto generador de I como $\mathfrak{o}_K$-módulo. La norma reducida $\mathrm{nrd}(I)$ es el ideal en K generado por las normas de los elementos α_k y las sumas $\alpha_i + \alpha_j$. Como el ideal I_v está generado sobre $\mathfrak{o}_{K,v}$ por el mismo conjunto, los ideales $\mathrm{nrd}(I_v)$ y $\mathrm{nrd}(I)_v$ en K_v están generados por los mismos elementos.

Con respecto al producto de ideales, asumiendo la validez de $\mathcal{O}_{izq}(I_v) = \mathcal{O}_{izq}(I)_v$ para todo ideal I y todo lugar finito v, si $I_v J_v$ es coherente para todo v, entonces IJ es coherente (y viceversa). Supongamos, ahora, que I es invertible. Por continuidad, $I_v J_v \subset (IJ)_v$. En particular, el inverso de I verifica $I_v (I_v)^{-1} \subset (II^{-1})_v = \mathcal{O}_{izq}(I)_v$. Dado que también $\mathcal{O}_{izq}(I) = II^{-1} \subset I_v (I^{-1})_v$, se deduce que $I_v (I^{-1})_v = \mathcal{O}_{izq}(I_v)$. Lo mismo es cierto tomando el producto en el orden inverso. En particular, I_v es invertible e $(I_v)^{-1} = (I^{-1})_v$. En definitiva, $I_v^{-1}(IJ)_v \subset (I^{-1}IJ)_v = J_v$, de lo que se deduce, por invertibilidad de I_v, que $(IJ)_v \subset I_v J_v$. □

Corolario II.27. *Un ideal I de B es invertible, si y sólo si es localmente invertible; equivalentemente, un ideal es invertible, si y sólo si es localmente principal. En tal caso, $I^{-1} = \mathrm{nrd}(I)^{-1}\,\bar{I}$.*

Corolario II.28. *Sea $\mathcal{O}$ un orden de B. Entonces* $\mathrm{d}_{\mathcal{O}_v} = (\mathrm{d}_{\mathcal{O}})_v$*, para todo lugar finito v. En particular, $\mathcal{O}$ es maximal, si y sólo si* $\mathrm{d}_{\mathcal{O}} = \mathrm{d}_B$.

Si $\mathcal{O}$ es de Eichler, su *nivel* es el ideal $\mathfrak{N} = \bigcap_{v\in V_f^K} (K \cap \mathfrak{N}_v)$ de K, donde $\mathfrak{N}_v$ denota el nivel del orden de Eichler $\mathcal{O}_v$, si v es no ramificado, y $\mathfrak{N}_v = \mathfrak{o}_{K,v}$, si B ramifica en v. El discriminante reducido de un orden de Eichler $\mathcal{O}$ de nivel $\mathfrak{N}$ es igual a $\mathrm{d}_{\mathcal{O}} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{N}$, donde $\mathfrak{D} = \mathrm{d}_B$. Notemos que $(\mathfrak{N}, \mathfrak{D}) = 1$.

II.7. Clases de ideales

Sean I, J dos ideales de B. Decimos que I y J son *equivalentes a izquierda*, si existe $b \in B^\times$ tal que $I = bJ$. Dado un orden $\mathcal{O}$ en B, el *conjunto de clases a izquierda de $\mathcal{O}$*, denotado $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$, es el conjunto de clases de ideales invertibles I de B tales que $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}$ módulo la relación de equivalencia a izquierda. A diferencia de lo que ocurre en el caso de un cuerpo de números, este conjunto es, simplemente, un conjunto.

Sea $\widehat{g} = (g_v)_v \in \widehat{B}^\times$. La familia de retículos $\{g_v\mathcal{O}_v\}_v$ determina un ideal de B cuyo orden a derecha es $\mathcal{O}$. Dicho ideal es, por definición, localmente principal y, por lo tanto, invertible. Recíprocamente, como todo ideal invertible es localmente principal, la aplicación $(g_v)_v \mapsto I$ así definida es sobreyectiva. Si $(g_v)_v, (g'_v)_v \in \widehat{B}^\times$, vale $g_v\mathcal{O}_v = g'_v\mathcal{O}_v$ para todo v, si y sólo si $g'_v \in g_v\mathcal{O}_v^\times$ para todo v. Hay una biyección

$$\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideales invertibles } I \subset B \text{ con} \\ \mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O} \end{array} \right\} = \bigcup_{\mathcal{O}' \subset B} \mathcal{I}(\mathcal{O}', \mathcal{O}) \ ,$$

que determina una correspondencia entre $B^\times \backslash \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$.

Teorema II.29. *Si B/K es un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de números y $\mathcal{O} \subset B$ es un orden de Eichler, el cardinal del conjunto* $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$*, el* número de clases *de $\mathcal{O}$, es finito.*

Teorema II.30 (Eichler)**.** *La norma reducida induce una suryección*

$$n \ : \ B^\times \backslash \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \twoheadrightarrow K_{(+)}^\times \backslash \widehat{K}^\times/\widehat{\mathfrak{o}_K}^\times$$

del conjunto de clases $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$*, en un grupo de clases asociado al cuerpo K y al álgebra B. Si, además, B/K es indefinida, esta aplicación es biyectiva.*

Cuando B es totalmente definida, $K_{(+)}^\times = K_+^\times$ y la aplicación n del Teorema II.30 es una suryección en el grupo de clases estrictas $\mathrm{Cl}^+(K)$. Si B es indefinida, se obtiene una biyección con un cociente de este grupo, denotado $\mathrm{Cl}^{(+)}(K)$. De todas maneras, $\mathrm{Cl}^+(K)$ aparece, si modificamos el grupo actuando a izquierda.

Corolario II.31. *La norma reducida induce una aplicación sobreyectiva*

$$\widetilde{n} \ : \ B_+^\times \backslash \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \twoheadrightarrow K_+^\times \backslash \widehat{K}^\times/\widehat{\mathfrak{o}_K}^\times \ .$$

Si B es indefinida, $\widetilde{n}$ es una biyección.

Capítulo III

Formas modulares de Hilbert

Las formas de Hilbert se pueden ver, en analogía con las formas modulares elípticas, como funciones holomorfas en un producto de copias del semiplano complejo superior y que verifican una condición de invarianza respecto de un subgrupo discreto de $\mathrm{GL}_2^+(F)$. Aquí, F denotará un cuerpo de números totalmente real de grado $[F:\mathbb{Q}] = n$ y $\mathfrak{o}_F$ su anillo de enteros, $\mathfrak{N}$ denotará un ideal íntegro de F y $\mathfrak{a}$ un ideal fraccionario.

III.1. El grupo $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ y subgrupos de congruencia

Usando las n inmersiones de F en $\mathbb{R}$, queda determinada una inclusión de $\mathrm{GL}_2^+(F)$ en el producto $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^n$ y, de esta manera, una acción de $\mathrm{GL}_2^+(F)$ en $\mathfrak{h}^n$ dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \ldots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n} \right) . \tag{III.1.1}$$

El espacio $\mathfrak{h}^n$ posee una medida invariante por la acción de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n$:

$$d\mu = \prod_{i=1}^{n} y_i^{-2} dx_i dy_i . \tag{III.1.2}$$

En particular, por (III.1.1) esta medida es invariante por $\mathrm{GL}_2^+(F)$.

Sea $\mathcal{O}_0(1)$ el orden maximal

$$\mathcal{O}_0(1) := \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathfrak{o}_F) = \begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix} \tag{III.1.3}$$

contenido en $B = \mathrm{M}_{2\times 2}(F)$. Manteniendo este orden fijo, consideramos los órdenes de la forma

$$\mathcal{O}_0(\mathfrak{N}) := \begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix} \subset \mathcal{O}_0(1) , \tag{III.1.4}$$

que resultan ser órdenes de Eichler para los distintos ideales íntegros $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{o}_F$. Si no hay ambigüedad, escribiremos $\mathcal{O}$ en lugar de $\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})$. Dado un ideal fraccionario $\mathfrak{a}$ de F, fijamos un idèle finito $\widehat{a} \in \widehat{F}^\times$ que cumpla

$$\mathfrak{a} = \widehat{a}\widehat{\mathfrak{o}_F} \cap F \tag{III.1.5}$$

y $\widehat{\alpha} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ dado por

$$\widehat{\alpha} = \begin{bmatrix} \widehat{a} & \\ & 1 \end{bmatrix} . \tag{III.1.6}$$

En particular, $\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$. De esta manera, a cada ideal $\mathfrak{a}$, se le asocian el orden de Eichler

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{a}} := \left(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}^{-1}\right) \cap \mathrm{M}_{2\times 2}(F) = \begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{N}\mathfrak{a}^{-1} & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix} \tag{III.1.7}$$

y el grupo de unidades totalmente positivas

$$\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) := \mathcal{O}_{\mathfrak{a}}^\times \cap \mathrm{GL}_2^+(F) . \tag{III.1.8}$$

Escribiremos ocasionalmente, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ o $\mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times$ para denotar este mismo grupo.

Al álgebra $\mathrm{M}_{2\times 2}(F)$ y al orden $\mathcal{O}$ se les asocia la variedad

$$Y_0(\mathfrak{N}) = \bigsqcup_{\mathfrak{a}} Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) ,$$

donde $\mathfrak{a}$ recorre un sistema de representantes del grupo de clases estrictas $\mathrm{Cl}^+(F)$ e $Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ se define como el cociente $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})\backslash\mathfrak{h}^n$ (comparar con § IV.1). Esta variedad no es compacta pero, vía la determinación de un dominio fundamental para cada componente $Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, se demuestra que es de volumen finito.[1] Para obtener una variedad compacta, se considera el grupo $\mathrm{GL}_2^+(F)$ actuando en $\mathbb{P}^1(F)$ por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [\alpha : \beta] = [a\alpha + b\beta : c\alpha + d\beta] \tag{III.1.9}$$

Como también $\mathbb{P}^1(F) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R})^n$ vía las inmersiones de F en $\mathbb{R}$, podemos obtener una compactificación de $Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ agregando las cúspides de $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, las órbitas de $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ actuando en $\mathbb{P}^1(F)$ –esta compactificación se conoce como *compactificación de Baily-Borel*[2] – que denotamos

$$X_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) := \Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})\backslash \left(\mathfrak{h}^n \cup \mathbb{P}^1(F)\right) .$$

A diferencia de las *curvas* modulares, estas variedades tienen puntos singulares: los puntos elípticos y las (finitas) cúspides que agregamos. Cuando $F = \mathbb{Q}$, para cada nivel

[1] [18, Ch. IV, § 1]
[2] [18, Ch. II, § 7]

$N > 1$ hay una única curva $X_0(N)$. En general, a cada ideal íntegro $\mathfrak{N}$, le asociamos en principio una variedad $X_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ por cada $\mathfrak{a}$ en un sistema de representantes de las clases en $\mathrm{Cl}^+(F)$.

Además de los grupos $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$, aparecerán naturalmente otros, por ejemplo, de la forma $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a}) \cap \left(\gamma\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{b})\gamma^{-1}\right)$. Las propiedades fundamentales de las formas de Hilbert: existencia de expansión de Fourier y principio de Koecher, dependen de la existencia de suficientes "traslaciones" y de suficientes "homotecias" (respectivamente). Estas transformaciones surgen de considerar el estabilizador de la cúspide ∞ en $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$. Por otra parte, para poder relacionar el producto interno de Petersson con los operadores de Hecke en los espacios de formas cuspidales, necesitaremos garantizar que estas transformaciones estén presentes, también, en otros grupos. Con este fin, introducimos los subgrupos de congruencia y la relación de conmensurabilidad.

Dados $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{a}$, respectivamente un ideal íntegro y un ideal fraccionario en F, definimos un grupo $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ por la expresión (III.1.8) (la diferencia está en que $\mathfrak{a}$ es, en principio, arbitrario). Fijado $\mathfrak{a}$, los grupos $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ constituyen una familia ordenada por $\mathfrak{M} \mid \mathfrak{N} \Rightarrow \Gamma_0(\mathfrak{M},\mathfrak{a}) \supset \Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$, con $\Gamma_0(1,\mathfrak{a})$ conteniendo a todos. El anillo $\mathcal{O}_0(1)_\mathfrak{a}$ ((III.1.7) con $\mathfrak{N}=1$) actúa por endomorfismos en el $\mathfrak{o}_F$-módulo $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{o}_F$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x,y) \;=\; (ax+by, cx+dy)\ .$$

Evaluando en un punto $(x,0)$ y en un punto $(0,y)$ $(x,y\neq 0)$, se ve que el único elemento que actúa trivialmente es la matriz identidad $I\in\mathcal{O}_0(1)_\mathfrak{a}$. En particular, el grupo $\Gamma_0(1,\mathfrak{a})$ se realiza como un subgrupo de automorfismos de este $\mathfrak{o}_F$-módulo. Para cada ideal íntegro $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{o}_F$, el submódulo $\mathfrak{N}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{N}$ es $\mathcal{O}_0(1)_\mathfrak{a}$-invariante:

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1} & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix}(\mathfrak{N}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{N}) \;\subset\; \mathfrak{N}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{N}\ .$$

En particular, $\Gamma_0(1,\mathfrak{a})$ preserva este submódulo y la acción del grupo desciende a una acción en el cociente $\left(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{o}_F\right)/\left(\mathfrak{N}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{N}\right)\simeq\mathfrak{a}/\mathfrak{N}\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{o}_F/\mathfrak{N}$. La imagen del correspondiente morfismo $\Gamma_0(1,\mathfrak{a})\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{a}/\mathfrak{N}\mathfrak{a}\,\oplus\,\mathfrak{o}_F/\mathfrak{N})$ es finita y su núcleo está dado por

$$\Gamma(\mathfrak{N},\mathfrak{a}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(1,\mathfrak{a}) \;:\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \left(\mathfrak{N}\cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1} & \mathfrak{o}_F \end{bmatrix} \right) \right\}\ .$$

El grupo $\Gamma(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ es, pues, normal en $\Gamma_0(1,\mathfrak{a})$ y de índice finito. Además, la condición $c\in\mathfrak{N}\mathfrak{a}^{-1}$ implica que $\Gamma(\mathfrak{N},\mathfrak{a})\subset\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$. Un subgrupo $\Gamma\subset\mathrm{GL}_2^+(F)$ se dice *de congruencia*, si existen ideales $\mathfrak{a},\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{N},\mathfrak{N}'\subset\mathfrak{o}_F$ y $A\in\mathrm{GL}_2^+(F)$ tales que

$$A^{-1}\,\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})\,A \;\supset\; \Gamma \;\supset\; \Gamma(\mathfrak{N}',\mathfrak{a}')\ .$$

Los grupos $\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ son subgrupos de congruencia. Se puede demostrar que la clase de subgrupos de congruencia es cerrada por conjugación en $\mathrm{GL}_2^+(F)$ y que todos los subgrupos de congruencia son conmensurables entre sí.[3]

En general, si $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$ es conmensurable con $\Gamma_0(1,1)$ (y, por lo tanto, con todo subgrupo de congruencia), entonces el cociente $\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n$ es una variedad no compacta y de volumen finito. Si $\Gamma' \subset \Gamma$ es un subgrupo de índice finito, entonces[4]

$$\mu\big(\Gamma'\backslash\mathfrak{h}^n\big) \;=\; \big|\Gamma : \Gamma'\big| \cdot \mu\big(\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n\big)\ .$$

III.2. Formas modulares para subgrupos de congruencia

Entenderemos por *peso* un vector $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 2})^n$ tal que $k_i \equiv k_j \pmod 2$. Dado un peso $\underline{k}$, definimos

$$k_0 \;=\; \max_i k_i\ , \quad m_i \;=\; \frac{k_0 - k_i}{2} \quad \text{y} \quad w_i \;=\; k_i - 2\ . \tag{III.2.1}$$

Definición III.1. Sea $\underline{k}$ un peso y sea $J_i : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{h}^{\pm} \to \mathbb{C}$ el factor de automorfía

$$J_i(\gamma, z) \;=\; \frac{j(\gamma, z)^{k_i}}{\det(\gamma)^{m_i + k_i - 1}}\ . \tag{III.2.2}$$

Dado un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$, una función $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ $(n > 1)$ se dice *de peso $\underline{k}$ invariante para* Γ, si, para toda $\gamma \in \Gamma$, satisface

$$f(\gamma z) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} J_i(\gamma_i, z_i)\right) f(z)\ ,$$

donde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{h}^n$ y $\gamma_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ es la matriz que se obtiene aplicando la i-ésima inmersión a las coordenadas de γ.

Las funciones J_i verifican

$$J_i(\gamma\gamma', z) \;=\; J_i(\gamma, \gamma' z)\, J_i(\gamma', z) \tag{III.2.3}$$

para todo $z \in \mathfrak{h}^n$ y todas $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Definición III.2. Dada una matriz $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$, definimos el *operador de peso $\underline{k}$* actuando en una función $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} J_i(\gamma_i, z_i)^{-1}\right) f(\gamma z)\ . \tag{III.2.4}$$

[3] Ver [17, Ch. I, § 3] para una idea de la demostración.

[4] [18, Ch. IV, § 1]

Entonces, una función f es de peso $\underline{k}$ invariante para un subgrupo de congruencia Γ, si $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para toda matriz $\gamma \in \Gamma$ y la relación (III.2.3) implica que $\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)\big|_{\underline{k}}\gamma' = f\big|_{\underline{k}}(\gamma\gamma')$. En particular, si f es invariante de peso $\underline{k}$ para un subgrupo Γ, entonces $f\big|_{\underline{k}}A$ es de peso $\underline{k}$ invariante para el conjugado $A^{-1}\Gamma A$.

Observación III.3. Un comentario acerca de la elección de los factores (III.2.2). Si $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$ es un subgrupo de congruencia, entonces Γ contiene un subgrupo de índice finito en el grupo de unidades del cuerpo: específicamente, $|\mathfrak{o}_F^\times : \Gamma \cap \mathfrak{o}_F^\times| < \infty$, identificando $x \in F^\times$ con $\left[\begin{smallmatrix} x & \\ & x \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(F)$. Consideremos la siguiente variación de la Definición III.1. Llamamos *peso* a un par $(\underline{k}, \underline{m})$, donde $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$ y $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$ y definimos una acción a derecha de $\mathrm{GL}_2^+(F)$ en funciones $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ torcida por un peso $(\underline{k}, \underline{m})$: dada $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ y $z \in \mathfrak{h}^n$,

$$\big(f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma\big)(z) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\det(\gamma_i)^{k_i+m_i-1}}{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}}\right) f(\gamma \cdot z) \;.$$

Los elementos centrales $x = \left[\begin{smallmatrix} x & \\ & x \end{smallmatrix}\right] \in F^\times$ actúan por multiplicación por escalares: $f\big|_{\underline{k},\underline{m}}x = x^{(\underline{k}+2\cdot\underline{m})-2\cdot\underline{1}} f$, donde $x^{(v_1,\,\dots,\,v_n)} = \prod_i x_i^{v_i}$ y $\underline{1} = (1, \dots, 1)$ es el vector de peso 1 en todas las componentes. Decimos que f es *de peso* $(\underline{k}, \underline{m})$ *invariante para* Γ, si $f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma = f$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Recuperamos la Definición III.1 eligiendo $m_i = \frac{k_0 - k_i}{2}$, con $k_0 = \text{máx}_i\, k_i$ y recuperamos la definición usual mencionada en la introducción, determinada por la regla de transformación (I.0.1), tomando $m_i = 1 - \frac{k_i}{2}$. Notamos que, en ambos casos, $x \in F^\times$ actúa por multiplicación por una potencia de la norma $\mathrm{Nm}_{F/\mathbb{Q}}(x)$, pues el valor de $k_i + 2m_i$ es independiente de de la inmersión i. Un peso $(\underline{k}, \underline{m})$ tal que $k_i + 2m_i$ no depende de i se dice *razonable*.[5]

En general, dados un subgrupo de congruencia Γ y un peso $(\underline{k}, \underline{m})$, las únicas funciones de peso $(\underline{k}, \underline{m})$ invariantes para Γ son las funciones nulas, a menos que el peso sea razonable; esto es consecuencia de que, si $f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma = f$ para toda $\gamma \in \Gamma$ con $f \neq 0$, entonces $\varepsilon^{(\underline{k}+2\cdot\underline{m})-2\cdot\underline{1}} = 1$ para toda unidad $\varepsilon \in U = \Gamma \cap \mathfrak{o}_F^\times$, pero $|\mathfrak{o}_F^\times : U| < \infty$ implica que U es un subgrupo de rango máximo en $\mathfrak{o}_F^\times$ y esto, a su vez, fuerza que el valor $k_i + 2m_i$ sea independiente de i.

Dos pesos razonables $(\underline{k}, \underline{m})$ y $(\underline{k}, \underline{m}')$ asociados al mismo vector de enteros $\underline{k}$ difieren en un vector constante $\underline{m} - \underline{m}' = h \cdot \underline{1}$, con $h \in \mathbb{R}$. Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$, la relación entre las correspondientes acciones a derecha está dada por:

$$f\big|_{\underline{k},\underline{m}+h\cdot\underline{1}}\gamma \;=\; \mathrm{Nm}(\det\gamma)^h\, f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma \;.$$

En particular, si $\gamma \in \Gamma$ entonces $\det(\gamma) \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times$ y su norma es 1, con lo que las definiciones de invarianza para un subgrupo de congruencia Γ no se ve modificada por aplicar una

[5]Ver [9].

traslación constante a la componente $\underline{m}$ del peso. Al pasar a la interpretación adélica (§ III.4), podremos observar que los espacios de formas modulares asociados a pesos $(\underline{k}, \underline{m})$ y $(\underline{k}, \underline{m}')$ son isomorfos; desde un punto de vista analítico, no habrá razón para preferir uno sobre el otro.

La diferencia surge del lado algebraico, al observar que los subgrupos de congruencia contienen matrices de la forma $\left[\begin{smallmatrix} \varepsilon & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right]$, donde ε es cualquier unidad totalmente positiva perteneciente a cierto subgrupo de índice finito (rango máximo) en $\mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$ dependiendo del subgrupo de congruencia. Por ejemplo, supongamos que f verifica $f(\gamma \cdot z) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}}{\det(\gamma_i)^{k_i/2}} \right) f(z)$, para toda $\gamma \in \Gamma$, entonces, para toda unidad totalmente positiva ε perteneciente a un subgrupo de índice finito en $\mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$, la ecuación funcional es $f(\varepsilon\, z) = \varepsilon^{\underline{k}/2} f(z)$; si ls enteros k_i son impares, aparecen raíces cuadradas de estas unidades. Si queremos "corregir" esto, necesitamos elegir h tal que $k_i/2 + h \in \mathbb{Z}$ para todo i; y esto sólo se puede hacer, si los k_i *tienen todos la misma paridad*. Podemos tomar $h = k_0/2 - 1$ (y obtenemos el factor en la Definición III.1) o una traslación de éste por cualquier entero t: $(k_0/2 - 1) + t$. Esto corresponde a tomar pesos de la forma $(\underline{k}, \underline{m})$, con $m_i = \frac{k_0 - k_i}{2} + t$, $t \in \mathbb{Z}$ independiente de i. La ecuación funcional que cumple f se lee

$$f(\varepsilon\, z) = \left(\prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{1 - \left(\frac{k_0 - k_i}{2} + t \right)} \right) f(z) \, .$$

Con cualquier elección de entero t (y $h = k_0/2 - 1 + t$), los vectores $\underline{m}$ son enteros;[6] tomando $t = 0$, se consigue que, además, $m_i \geq 0$ para todo i y $m_j = 0$ para, al menos, algún j.

De ahora en adelante, a menos que indiquemos otra cosa, consideraremos funciones invariantes en el sentido de la Definición III.1.

Al igual que las formas modulares elípticas, las funciones holomorfas que satisfacen esta condición de invarianza también admiten desarrollos en series de Fourier. Para poder entender esto, necesitamos analizar el grupo de isotropía de la cúspide en infinito. Nos restringimos, en primer lugar, al caso $\Gamma = \Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$.

Sea $\infty = [1 : 0] \in \mathbb{P}^1(F)$. Entonces una matriz $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ deja fija la cúspide ∞ exactamente cuando $c = 0$. En particular,

$$\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ & d \end{bmatrix} : a,\, d \in \mathfrak{o}_F,\, b \in \mathfrak{a},\, ad \in \mathfrak{o}_{F,+}^{\times} \right\} ,$$

cuyos elementos actúan por $z \mapsto \epsilon z + \mu$, donde $\mu \in \mathfrak{a}$ y ϵ es una unidad totalmente positiva del anillo de enteros de F. En general, si $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$ es un subgrupo de

[6] Ver [9] para una discusión más detallada de los pesos.

congruencia, entonces existe un retículo $M \subset F$ y existe un subgrupo de unidades totalmente positivas $V \subset \mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$ de rango máximo, $n-1$, que preservan M y tales que[7]

$$G(M,V) = \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon & \mu \\ & 1 \end{bmatrix} : \mu \in M,\, \epsilon \in V \right\} \subset \Gamma$$

El subgrupo $G(M,V)$ es isomorfo al producto semidirecto $M \rtimes V$ y es un subgrupo del grupo de isotropía Γ_∞. El grupo V podría ser un subgrupo propio del grupo completo de elementos de F (necesariamente unidades) totalmente positivos que preservan el retículo M. Esto es consecuencia de la conmensurabilidad de los subgrupos de congruencia. Toda función $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ de peso $\underline{k}$ invariante para Γ es, pues, invariante por las traslaciones $z \mapsto z+\mu$ en un retículo M y admitirá, en consecuencia, una expansión de Fourier:

$$f(z) = \sum_{\nu \in M^\perp} a_\nu(f)\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu z)} \,, \tag{III.2.5}$$

donde $\mathrm{Tr}(\nu z) := \nu_1 z_1 + \cdots + \nu_n z_n$ y la suma se realiza sobre el retículo dual de M respecto de la forma traza. Nos referiremos a los coeficientes $a_\nu = a_\nu(f)$ como *los coeficientes de Fourier de* f. Diremos que f es *holomorfa en* ∞, si $a_\nu(f) \neq 0$ implica $\nu \gg 0$ o $\nu = 0$ y que *se anula en* ∞, si, además, $a_0(f) = 0$.

Observación III.4 (El retículo dual $M^\perp$)**.** Recordemos que los elementos de F se pueden ver como vectores en $\mathbb{R}^n$ vía $\mu \mapsto (\mu_1, \ldots, \mu_n)$. A través de esta identificación, los ideales de F pasan a ser retículos en $\mathbb{R}^n$ y, dados $\mu, \nu \in F$, la traza $\mathrm{Tr} : F \to \mathbb{Q}$ del producto $\nu\mu$ está dada por $\mathrm{Tr}(\nu\mu) = \nu_1\mu_1 + \cdots + \nu_n\mu_n$, es decir, el producto interno usual de los vectores correspondientes a ν y a μ. El retículo dual a $\mathfrak{a}$ es entonces:

$$M^\perp = \{\nu \in F : \mathrm{Tr}(\nu\mu) \in \mathbb{Z}\, \forall \mu \in M\} \ .$$

Si $M = \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$, donde $\mathfrak{d} = (\mathfrak{o}_F^*)^{-1}$ es el diferente (absoluto) de F.

Hemos visto que el grupo de isotropía de la cúspide en infinito consta de dos partes: traslaciones $z \mapsto z + \mu$ por elementos μ de un retículo en F y homotecias $z \mapsto \epsilon z$ por unidades totalmente positivas. Hasta ahora, solamente hemos analizado las consecuencias de la invarianza por traslaciones. La presencia de las unidades juega un papel importante en la teoría de formas de Hilbert:

Teorema III.5. *Sea M un retículo (completo) en F y sea $V \subset \mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$ un subgrupo de unidades totalmente positivas, de rango máximo, tales que $\epsilon M = M$. Si $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para toda matriz γ de la forma*

$$\gamma = \begin{bmatrix} \epsilon & \mu \\ & 1 \end{bmatrix}$$

con $\mu \in M$ y $\epsilon \in V$, entonces

[7] Ver [17, Ch. I.3] o [18, Ch. II.1].

(i) $a_{\nu\epsilon}(f) = \left(\prod_{i=1}^{n} \epsilon_i^{m_i+k_i-1}\right) a_\nu(f)$ *para todo* $\nu \in M^\perp$ *y* $\epsilon \in V$*;*

(ii) $a_\nu(f) \neq 0 \Rightarrow \nu = 0$ *o* $\nu \gg 0$ *.*

Si tomamos $\gamma = \begin{bmatrix} \epsilon & \\ & 1 \end{bmatrix}$, entonces $f(z) = \sum_{\nu \in M^\perp} a_\nu e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu z)}$ y

$$(f\big|_{\underline{k}}\gamma)(z) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} \epsilon_i^{m_i+k_i-1}\right) \sum_{\nu \in M^\perp} a_\nu e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu\epsilon z)} \;,$$

de donde se deduce *(i)*, comparando los coeficientes de Fourier ($\nu\epsilon \in M^\perp$). Para probar *(ii)*, supongamos que $\nu \in M^\perp$ es tal que $\nu_1 < 0$. Dado que V es de rango $n-1$, existe $\epsilon \in V$ con $0 < \epsilon_j < 1$ para $j \neq 1$ y, necesariamente, $\epsilon_1 > 1$. Evaluando en $\mathbf{i}$, como la serie de Fourier de f es absolutamente convergente, también lo es $\sum_{m \geq 1} a_{\nu\epsilon^m} e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu\epsilon^m \mathbf{i})}$. Pero, por *(i)*,

$$\sum_{m \geq 1} \left|a_{\nu\epsilon^m} e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu\epsilon^m \mathbf{i})}\right| \;=\; \sum_{m \geq 1} |a_\nu| \left(\prod_{i=1}^{n} \epsilon_i^{m(m_i+k_i-1)}\right) e^{-2\pi \mathrm{Tr}(\nu\epsilon^m)} \;.$$

Fijada alguna constante $\delta > 0$ tal que $\delta < |\nu_1|$, para m suficientemente grande, se cumple $\mathrm{Tr}(\nu\epsilon^m) < \epsilon_1^m(\nu_1 + \delta)$. En particular, el término general de la serie diverge, a menos que a_ν sea nulo.

Observación III.6. Podemos expresar *(ii)* de la siguiente manera: toda función holomorfa $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ ($n > 1$) de peso $\underline{k}$ invariante para Γ es automáticamente holomorfa en ∞. Este es el denominado *principio de Koecher*.

Definición III.7. Sea $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$ un subgrupo de congruencia. Emulando la definición de forma modular elíptica, decimos que una función $f : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ es una *forma modular de Hilbert de peso* $\underline{k}$ *para* Γ, si es holomorfa y satisface:

(i) f es de peso $\underline{k}$ invariante para Γ y

(ii) $f\big|_{\underline{k}}A$ es holomorfa en ∞ para toda $A \in \mathrm{GL}_2^+(F)$.

Denotamos por $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma)$ el espacio de formas modulares de peso $\underline{k}$ para Γ.

Observación III.8. La condición *(ii)* de la definición anterior tiene sentido: si Γ es de congruencia, $A^{-1}\,\Gamma\, A \approx \Gamma$ para toda $A \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ y la transformada $f\big|_{\underline{k}}A$ admite un desarrollo de Fourier en ∞. Pero, por la misma razón, el principio de Koecher es válido para el conjugado y la condición *(ii)* es redundante.

Definición III.9. Una forma modular f de peso $\underline{k}$ invariante para Γ se dice *forma cuspidal*, si $f\big|_{\underline{k}}A$ se anula en ∞ para toda matriz $A \in \mathrm{GL}_2^+(F)$, es decir, el coeficiente $a_0\big(f\big|_{\underline{k}}A\big)$ de la correspondiente expansión de Fourier es nulo. Las formas cuspidales constituyen un subespacio de $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma)$, el cual será denotado por $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$.

Si $\Gamma = \Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, escribimos $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ y $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ en lugar de $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}))$ y de $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}))$, respectivamente.

Observación III.10. Decimos que el peso $\underline{k}$ de una forma modular es *paralelo*, si $\underline{k} = (k, \ldots, k)$ para algún entero k. Del ítem *(i)* con $\nu = 0$ se deduce que, si el peso no es paralelo, entonces toda forma es cuspidal.

Teorema III.11. *El espacio de formas modulares $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma)$ es de dimensión finita.*

Demostración. Ver [2], [17, § I.6 y Ch. II] o [18]. □

III.3. Producto interno de formas cuspidales

Dado $z \in \mathfrak{h}^n$, definimos $\mathrm{Im}(z)^{\underline{k}} := \prod_{i=1}^n \mathrm{Im}(z_i)^{k_i}$. Sea $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$ un subgrupo de congruencia y sea $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma)$. Definimos una función

$$\varphi(z) \;:=\; f(z)\,\mathrm{Im}(z)^{\underline{k}/2} \tag{III.3.1}$$

y vemos que, si $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\gamma z) \;&=\; \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}}{\det(\gamma_i)^{m_i+k_i-1}}\right) f(z) \prod_{i=1}^n \frac{\mathrm{Im}(z)^{k_i/2}}{|j(\gamma_i, z_i)|_i^k} \det(\gamma_i)^{k_i/2} \\
&=\; \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\det(\gamma_i)^{k_0/2-1}} \left(\frac{j(\gamma_i, z_i)}{|j(\gamma_i, z_i)|}\right)^{k_i}\right) f(z)\mathrm{Im}(z)^{\underline{k}/2} \\
&=\; \frac{1}{\mathrm{Nm}(\det\,\gamma)^{k_0/2-1}} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{j(\gamma_i, z_i)}{|j(\gamma_i, z_i)|}\right)^{k_i}\right) \varphi(z)\ .
\end{aligned}$$

En particular, como $\det(\gamma) \in \mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$, $\mathrm{Nm}(\det\,\gamma) = 1$ y $|\varphi(z)|$ es constante en las órbitas de Γ en $\mathfrak{h}^n$. Entonces $|\varphi(z)|$ define una función continua en el cociente $\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n$.

Sean $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$ dos formas cuspidales y sean φ_f y φ_g las funciones asociadas a f y a g por (III.3.1). El producto $\varphi_f\overline{\varphi_g} = f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{Im}(z)^{\underline{k}}$ es Γ-invariante y acotado en $\mathfrak{h}^n$. Definimos

$$\langle f, g\rangle_\Gamma \;:=\; \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n} f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{Im}(z)^{\underline{k}}\,d\mu\ , \tag{III.3.2}$$

donde $d\mu$ es la medida invariante (III.1.2). Con respecto a esta medida, $\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n$ tiene volumen finito y la integral anterior define un producto interno en el espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$ de formas cuspidales que llamamos *producto interno de Petersson*.[8] En particular, las formas cuspidales son de cuadrado integrable:

$$\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}^n} |f(z)|^2|\mathrm{Im}(z)|^{\underline{k}}\,d\mu \;<\; \infty\ .$$

[8] [17, Ch. II]

Proposición III.12. *Sean $\Gamma' \subset \Gamma$ subgrupos de congruencia y sea $A \in \mathrm{GL}_2^+(F)$.*

(i) si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$ y $g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(A^{-1}\,\Gamma\,A)$, entonces

$$\langle f\big|_{\underline{k}} A, g\rangle_{A^{-1}\Gamma A} \;=\; \langle f, g\big|_{\underline{k}} A^{\iota}\rangle_{\Gamma}\ ,$$

donde $A^{\iota} = (\det A)\, A^{-1}$;

(ii) si $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$, entonces $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma')$ y

$$\langle f, g\rangle_{\Gamma'} \;=\; |\Gamma : \Gamma'|\, \langle f, g\rangle_{\Gamma}\ ;$$

(iii) si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$, $g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma')$ y $\Gamma = \bigsqcup_i \Gamma'\delta_i$ es una descomposición en coclases, entonces $h = \sum_i g\big|_{\underline{k}}\delta_i \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$ y

$$\langle f, h\rangle_{\Gamma} \;=\; \langle f, g\rangle_{\Gamma'}\ .$$

Demostración. Es análoga al caso de formas modulares sobre $\mathbb{Q}$. Se puede consultar, por ejemplo, [13, §§ 5.4 y 5.5]. □

III.4. Formas modulares de nivel $\mathfrak{N}$

Hemos mencionado al comienzo de esta sección que un orden de Eichler $\mathcal{O} \subset \mathrm{M}_{2\times 2}(F)$ de nivel $\mathfrak{N}$ tiene asociada cierta variedad $Y_0(\mathfrak{N})$. Esta variedad no es conexa, pero es una unión disjunta de componentes conexas $Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ indexadas por el grupo de clases estrictas del cuerpo F. En general, dado un subgrupo de congruencia $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2^+(F)$, la variedad $Y(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathfrak{h}^n$ no es compacta, pero es posible compactificarla agregando una cantidad finita de puntos, que hemos denominado cúspides. A diferencia de lo que sucede con las formas modulares elípticas, la holomorfía en las cúspides está garantizada por el principio de Koecher; pero esto no les resta importancia. La existencia de estas cúspides la hemos relacionado con la existencia de expansiones de Fourier para las formas $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\Gamma)$. Finalmente, estas expansiones nos han permitido identificar los subespacios $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\Gamma)$.

Definición III.13. Una *forma de Hilbert* de peso $\underline{k}$ y nivel $\mathfrak{N}$ es una función

$$f \,:\, (\mathfrak{h}^{\pm})^n \,\times\, (\mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \,\to\, \mathbb{C}$$

holomorfa en la primera variable y localmente constante en la segunda tal que $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para toda matriz $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$, donde

$$\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\det{(\gamma_i)}^{k_i+m_i-1}}{j(\gamma_i, z_i)^{k_i}}\right) f(\gamma z, \gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \qquad \text{(III.4.1)}$$

y los valores m_i están dados por (III.2.1). Denotamos este espacio por $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. Como en las secciones anteriores, usaremos la notación $J_i(\gamma_i, z_i) = \frac{\det(\gamma_i)^{k_i+m_i-1}}{j(\gamma_i,z_i)^{k_i}}$.

Observación III.14. En relación con la Observación III.3, podemos definir, más en general, $f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma$ por la misma expresión (III.4.1), pero con $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$ y $\underline{m} \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, y $\mathcal{M}_{\underline{k},\underline{m}}(\mathfrak{N})$ como el espacio de aquellas funciones que cumplen $f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma = f$ siempre que $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$. Este espacio es trivial, a menos que $(\underline{k}, \underline{m})$ sea un peso razonable. Si $h \in \mathbb{R}$, entonces

$$f\big|_{\underline{k},\underline{m}+h\cdot\underline{1}}\gamma \;=\; \mathrm{Nm}(\det\gamma)^h\, f\big|_{\underline{k},\underline{m}}\gamma \ ,$$

con lo cual, si $f \in \mathcal{M}_{\underline{k},\underline{m}}(\mathfrak{N})$, la función $\tilde{f}(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \big(\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, z)\,|\det\widehat{\alpha}|_{\mathbb{A}_F}\big)^h f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ verifica

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\gamma z, \gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;&=\; \big(\mathrm{sgn}(\mathrm{Nm}(\det\gamma))\,|\det\gamma_0|_{\mathbb{A}_F}\big)^h \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^{k_i}}{\det(\gamma_i)^{k_i+m_i-1}}\right)\tilde{f}(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\\ &=\; \mathrm{Nm}(\det\gamma)^{-h}\left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^{k_i}}{\det(\gamma_i)^{k_i+m_i-1}}\right)\tilde{f}(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\ ,\end{aligned}$$

donde γ_0 denota la proyección de γ a $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$. Es decir, $f \mapsto \tilde{f}$ es una biyección entre $\mathcal{M}_{\underline{k},\underline{m}}(\mathfrak{N})$ y $\mathcal{M}_{\underline{k},\underline{m}+h\cdot\underline{1}}(\mathfrak{N})$.

Consideraremos exclusivamente formas de Hilbert en el sentido de la Definición III.13.

Proposición III.15. *Existe un isomorfismo*

$$\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \;\simeq\; \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\mathfrak{a}) \ , \tag{III.4.2}$$

donde $\mathfrak{a}$ *recorre un sistema de representantes de las clases estrictas en* $\mathrm{Cl}^+(F)$.

Demostración. En primer lugar, por el Corolario II.31, la norma reducida induce una biyección

$$\mathrm{GL}_2^+(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times \;\simeq\; F_+^\times\backslash\widehat{F}^\times/\widehat{\mathfrak{o}_F}^\times \;\simeq\; \mathrm{Cl}^+(F)\ .$$

Eligiendo un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ de las clases estrictas de F, vía (III.1.5) y (III.1.6) queda determinado un conjunto $\{\widehat{\alpha}\}_{\mathfrak{a}}$ que constituye un sistema de representantes de las clases en $\mathrm{GL}_2^+(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times$, en correspondencia con $\{\mathfrak{a}\}$. En consecuencia, dada $\widehat{\alpha}' \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$, existen un representante $\widehat{\alpha}$ y una matriz $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ tales que $\gamma\widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. En segundo lugar, notamos que, por la Observación II.22, existen matrices $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathrm{GL}_2(F)$ tales que $\det(\iota_i(\rho_j)) > 0$ para $i \neq j$ y $\det(\iota_j(\rho_j)) < 0$.

Usando estas matrices, podemos ver que toda $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ está determinada por los valores que toma en el producto de los semiplanos superiores $\mathfrak{h}^n$. De estas dos observaciones, se deduce que $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ está determinada por los valores que toma en pares $(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$, con $z \in \mathfrak{h}^n$ y $\widehat{\alpha}$ tomado del conjunto de representantes $\{\widehat{\alpha}\}_{\mathfrak{a}}$.

Ahora, dada $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y uno de los representantes $\mathfrak{a}$, sea $f_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{h}^n \to \mathbb{C}$ la función

$$f_{\mathfrak{a}}(z) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \ .$$

Esta función $f_{\mathfrak{a}}$ es holomorfa, porque f lo es y, si $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, entonces

$$\begin{aligned} \big(f_{\mathfrak{a}}\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z) &= \left(\prod_{i=1}^{n} J_i(\gamma_i, z_i)^{-1}\right) f(\gamma z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z, \gamma^{-1}\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \\ &= \big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = f_{\mathfrak{a}}(z) \ . \end{aligned}$$

La aplicación $f \mapsto f_{\mathfrak{a}}$ es lineal e induce una transformación $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \to \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$. El argumento del párrafo anterior muestra que $f \mapsto (f_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}}$ es inyectiva. Recíprocamente, dadas $f_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, las condiciones

$$\begin{aligned} f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) &= f_{\mathfrak{a}}(z) \qquad \text{si } z \in \mathfrak{h}^n \quad \text{y} \\ f\big|_{\underline{k}}\gamma &= f \qquad \text{si } \gamma \in \mathrm{GL}_2(F) \end{aligned}$$

determinan unívocamente una función $f : (\mathfrak{h}^\pm)^n \times (\mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \to \mathbb{C}$. Veamos esto: si $(z, \widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times) \in (\mathfrak{h}^\pm)^n \times \mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times$, podemos tomar algún producto de las matrices ρ_j, llamémoslo ρ, de manera que $\rho\, z \in \mathfrak{h}^n$. Ahora, porque $\{\widehat{\alpha}\}_{\mathfrak{a}}$ es un sistema de representantes de $\mathrm{GL}_2^+(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times$, existen $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ y $\widehat{\alpha}$ en dicho conjunto, tales que $\gamma\rho\widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. Entonces $f(z, \widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ es igual a $f(\gamma\rho\, z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$, módulo alguna constante. Esta función es una forma modular de Hilbert: es holomorfa en la primera variable porque las $f_{\mathfrak{a}}$ lo son, es localmente constante porque, dado $\widehat{\alpha}'$, es constante en el entorno $\widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y verifica, por definición, la condición de invarianza. □

Definición III.16. Una forma de Hilbert $f = (f_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es una *forma cuspidal*, si $f_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ para cada representante $\mathfrak{a}$ de las clases estrictas de F. El subespacio de formas cuspidales lo denotamos $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y vale

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) \ . \tag{III.4.3}$$

Observación III.17. Teniendo en cuenta el isomorfismo (III.4.3), se podría definir un producto interno en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ por $\langle f, g\rangle = \sum_{\mathfrak{a}} \langle f_{\mathfrak{a}}, g_{\mathfrak{a}}\rangle_{\mathfrak{a}}$, donde $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathfrak{a}} = \langle \cdot, \cdot\rangle_{\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})}$. Pero esta expresión *depende de los representantes* $\{\mathfrak{a}\}$. Si $\{\mathfrak{a}_1\}$ es otra elección y $[\mathfrak{a}_1] = [\mathfrak{a}]$, entonces existen $\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1} \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ que verifican $\widehat{\alpha}_1\widehat{\mathcal{O}}^\times = \gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1}^{-1}\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$.[9] En particular, $\det(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1})\,\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ y, por la Proposición III.12 (i),

$$\langle f_{\mathfrak{a}_1}, g_{\mathfrak{a}_1}\rangle_{\mathfrak{a}_1} \;=\; \langle f_{\mathfrak{a}}\big|_{\underline{k}}\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1}, g_{\mathfrak{a}}\big|_{\underline{k}}\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1}\rangle_{\mathfrak{a}_1} \;=\; \mathrm{Nm}(\det(\gamma_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1}))^{k_0-2}\,\langle f_{\mathfrak{a}}, g_{\mathfrak{a}}\rangle_{\mathfrak{a}}\ .$$

Para obtener un producto invariante, se debe definir

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \sum_{\mathfrak{a}} \mathbb{N}(\mathfrak{a})^{k_0-2}\,\langle f_{\mathfrak{a}}, g_{\mathfrak{a}}\rangle_{\mathfrak{a}}\ . \tag{III.4.4}$$

Esta definición quedará mejor justificada una vez realizada la interpretación automorfa de las formas de Hilbert (§ III.5.1).

Sea $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. Cada componente $f_{\mathfrak{a}}$ admite un desarrollo de Fourier, que, por el Teorema III.5, es de la forma

$$f_{\mathfrak{a}}(z) \;=\; a_0(f_{\mathfrak{a}}) + \sum_{\nu\mathfrak{a}^\perp,\,\nu\gg 0} a_\nu(f_{\mathfrak{a}})\,e^{2\pi i\mathrm{Tr}(\nu z)}\ .$$

Los coeficientes de $f_{\mathfrak{a}}$ verifican $a_{\nu\epsilon}(f_{\mathfrak{a}}) = \left(\prod_{i=1}^n \epsilon_i^{m_i+k_i-1}\right) a_\nu(f_{\mathfrak{a}})$, para toda unidad totalmente positiva $\epsilon \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times$. En particular, el valor de la expresión

$$\tilde{c}(\nu, f_{\mathfrak{a}}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^n \nu_i^{m_i+k_i-1}\right)^{-1} a_\nu(f_{\mathfrak{a}}) \tag{III.4.5}$$

es invariante por multiplicar ν por una unidad totalmente positiva.

Por otro lado, como el conjunto $\{\mathfrak{a}\}$ es un sistema de representantes del grupo de clases estrictas de F, el conjunto $\{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\}$ (donde $\mathfrak{d}$ denota el diferente de F) también lo es. Dado un ideal fraccionario $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}_F$, existe un único representante $\mathfrak{a}$ tal que $[\mathfrak{m}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{d}]$ en $\mathrm{Cl}^+(F)$, es decir, existe $\nu \gg 0$ tal que $\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Si $\mathfrak{m}$ es íntegro, $\nu\mathfrak{a}\mathfrak{d} \subset \mathfrak{o}_F$, de lo que se deduce que $\nu \in (\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1} = \mathfrak{a}^\perp$. Definimos, entonces, una función en ideales

$$c(\mathfrak{m}, f) \;:=\; \begin{cases} \tilde{c}(\nu, f_{\mathfrak{a}}) & \text{si } \mathfrak{m} = \nu\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{d}\ (\ \nu \in \mathfrak{a}^\perp,\ \nu \gg 0\ ) \\ 0 & \text{si } \mathfrak{m} \text{ no es íntegro} \end{cases}\ . \tag{III.4.6}$$

Llamamos *coeficientes de Fourier de* f a los valores de esta función [46]. Dado que $\tilde{c}(\nu\epsilon, f_{\mathfrak{a}}) = \tilde{c}(\nu, f_{\mathfrak{a}})$, si $\epsilon \in \mathfrak{o}_{F,+}^\times$, los coeficientes de Fourier están bien definidos.

---

[9] Si $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1} \in F_+^\times$ verifica $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1}\,\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$, podemos elegir la matriz diagonal $\left[\begin{smallmatrix}\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}_1} & \\ & 1\end{smallmatrix}\right]$.

III.5. Funciones en los adèles

A continuación enunciamos la correspondencia entre formas modulares de Hilbert y formas automorfas en el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Su demostración es análoga a la de la Proposición I.2. Para cada lugar arquimediano $v \in V_\infty^F$, definimos $K_v = \mathrm{SO}(2)$. El producto $K_\infty = \prod_{v\in V_\infty^F} K_v$ es el subgrupo compacto y conexo maximal del estabilizador del punto $\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) \in (\mathfrak{h}^\pm)^n$ por la acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^n$.

Proposición III.18. *La aplicación $f \mapsto \phi_f$ que a una forma de Hilbert cuspidal le asigna la función*

$$\phi_f(g_\infty, \widehat{\alpha}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^n J_i(g_i, \sqrt{-1})^{-1}\right) f(g_\infty \cdot \mathbf{i}, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \tag{III.5.1}$$

determina una correspondencia entre el espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y el espacio de funciones $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ que cumplen con:

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ *para toda* $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$*;*

(ii) $\phi(g\widehat{\beta}) = \phi(g)$ *si* $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$ *;*

(iii) $\phi(gh) = \prod_{i=1}^n e^{\sqrt{-1}k_i\theta_i}\,\phi(g)$ *si* $h = (r_{\theta_1}, \ldots, r_{\theta_n}) \in K_\infty$ *;*

(iv) $\phi(\tau_\infty g) = \prod_{i=1}^n \tau_i^{k_0-2}\phi(g)$ *si* $\tau_\infty = \left(\begin{bmatrix}\tau_1 & \\ & \tau_1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}\tau_n & \\ & \tau_n\end{bmatrix}\right) \in \mathrm{Z}(\mathbb{R})$ *;*

(v) ϕ *es de* crecimiento moderado*: si* $\Omega \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ *es un subconjunto compacto y* $c > 0$*, existen constantes* C *y* N *tales que*

$$\left|\phi\left(\begin{bmatrix}a & \\ & 1\end{bmatrix} g\right)\right| \;\leq\; C\,|a|^N$$

para toda $g \in \Omega$ *y* $a \in \mathbb{A}_F^\times$ *con* $|a| > c$*; y*

(vi) como función de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n$*,* ϕ *es* C^∞ *y verifica la ecuación diferencial*

$$\Delta_i\phi \;=\; -\,\frac{k_i}{2}\left(\frac{k_i}{2} \,-\, 1\right)\phi \;;$$

(vii) ϕ *es* cuspidal*, es decir,*

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}_F} \phi\left(\begin{bmatrix}1 & x\\ & 1\end{bmatrix} g\right) dx \;=\; 0$$

para casi todo g*.*

Teniendo en cuenta la correspondencia entre formas cuspidales y formas automorfas, si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$, llamaremos también forma de Hilbert cuspidal a la correspondiente función ϕ_f dada por (III.5.1).

III.5.1. Funciones de cuadrado integrable

Usando el lenguaje adélico, definimos un producto interno $\langle f, g\rangle$ para formas cuspidales. Fijamos un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ del grupo de clases estrictas de F y denotamos por $\widehat{\alpha}$ las matrices dadas por (III.1.6).

Si bien, puede parecer natural definir un producto interno usando el isomorfismo (III.4.3) y la expresión (III.3.2) para los grupos $\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$, una definición así dependería del sistema de representantes de $\mathrm{Cl}^+(F)$ que parametriza las componentes de la variedad $Y_0(\mathfrak{N})$. Para llegar a una definición adecuada, observamos, en primer lugar, que dicha parametrización está relacionada con una descomposición similar del grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Por aproximación fuerte (ver también § IV.1),

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \;=\; \bigsqcup_{\mathfrak{a}} \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n\,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times \;.$$

Entonces hay una identificación

$$\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_\infty\widehat{\mathcal{O}}^\times \;\simeq\; \bigsqcup_{\mathfrak{a}} \Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})\backslash\mathfrak{h}^n \;=\; Y_0(\mathfrak{N}) \;. \tag{III.5.2}$$

En segundo lugar, para cada representante $\mathfrak{a}$, si $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ el producto interno $\langle f_\mathfrak{a}, g_\mathfrak{a}\rangle_\mathfrak{a}$ se define en términos de una integral sobre la componente correspondiente de la variedad $Y_0(\mathfrak{N})$. Del lado adélico, teniendo en cuenta la identificación (III.5.2), debemos poder integrar sobre el cociente $\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. El problema es que, si bien las funciones ϕ_f y ϕ_g son invariantes por $\mathrm{GL}_2(F)$, no es obvio cómo obtener a partir de ellas un integrando definido módulo el centro $\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$.

Sea $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y sea $\phi = \phi_f$ la función definida por (III.5.1). Según el ítem (iv) de la Proposición III.18, sabemos que $\phi(\tau_\infty g) = \left(\prod_{i=1}^n \tau_i^{k_0-2}\right)\phi(g)$, si $\tau_\infty \in \mathrm{Z}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^\times)^n$. Pero no hemos dicho nada acerca de cómo afecta multiplicar por un elemento central de la parte no arquimediana. Para poder describir esta acción, definimos, para cada $\tau \in \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$ y cada ϕ, una función $\rho(\tau)\phi$ por

$$\big(\rho(\tau)\phi\big)(g) \;=\; |\tau|_{\mathbb{A}_F}^{-(k_0-2)}\,\phi(\tau g) \;,$$

donde $|\tau|_{\mathbb{A}_F}$ denota el valor absoluto del adèle τ.[10]

Sea $\{\widehat{a}\} \subset \widehat{F}^\times$ un sistema de representantes de las clases en $\mathrm{Cl}^+(F)$ y sea $\widehat{\tau} \in \widehat{F}^\times$. Existen $\lambda \in F_+^\times$, $\widehat{r} \in \widehat{\mathfrak{o}_F}^\times$ y un representante $\widehat{a}$ tales que $\widehat{\tau} = \lambda_0\widehat{a}\widehat{r}$, donde λ_0 denota la parte finita de λ. La parte arquimediana la denotamos λ_∞. Entonces, dado que $\widehat{\mathfrak{o}_F}^\times \subset \widehat{\mathcal{O}}^\times \cap \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$, $\phi(\lambda g) = \phi(g) = \phi(g\widehat{r})$, $|\lambda|_{\mathbb{A}_F} = 1 = |\widehat{r}|_{\mathbb{A}_F}$ y $\lambda \gg 0$, podemos

[10] Recordemos que este valor absoluto está dado por $|\tau|_{\mathbb{A}_F} = \prod_v |\tau_v|_v$, donde $|\cdot|_v$ denota el valor absoluto en la completación F_v.

deducir que

$$\begin{aligned}\big(\rho(\widehat{\tau})\phi\big)(g) \;&=\; |\lambda_0\widehat{a}\widehat{r}|_{\mathbb{A}_F}^{-(k_0-2)}\,\phi(\lambda_0\widehat{a}\widehat{r}g) \;=\; |\lambda_\infty|_{\mathbb{A}_F}^{k_0-2}|\widehat{a}|_{\mathbb{A}_F}^{-(k_0-2)}\,\phi(\lambda\lambda_\infty^{-1}\widehat{a}g\widehat{r})\\ &=\; |\mathrm{Nm}(\lambda)|^{k_0-2}|\widehat{a}|_{\mathbb{A}_F}^{-(k_0-2)}\,\phi(\lambda_\infty^{-1}\widehat{a}g) \;=\; \mathrm{sgn}(\mathrm{Nm}(\lambda))^{-(k_0-2)}|\widehat{a}|_{\mathbb{A}_F}^{-(k_0-2)}\,\phi(\widehat{a}g)\\ &=\; \big(\rho(\widehat{a})\phi\big)(g)\;.\end{aligned}$$

Si llamamos $\chi_\infty(\tau_\infty) = \prod_{i=1}^n \mathrm{sgn}(\tau_i)^{k_0-2}$, entonces, dado $\tau = (\tau_\infty, \widehat{\tau})$, vale que $\rho(\tau) = \chi_\infty(\tau_\infty)\rho(\widehat{\tau})$. De lo anterior, se deduce que la restricción de ρ a la parte finita $\widehat{F}^\times$ es, en otras palabras, una representación del grupo abeliano finito $\mathrm{Cl}^+(F)$. Podemos concluir que $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ se descompone como suma directa de subrepresentaciones irreducibles, cada una de grado 1:[11]

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \;=\; \bigoplus_{\omega} \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)\;\;, \tag{III.5.3}$$

donde $\omega : \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ es el cuasicarácter $\omega = |\cdot|_{\mathbb{A}_F}^{k_0-2}\,\chi_\infty\chi_0$, χ_0 recorre los caracteres del grupo $\mathrm{Cl}^+(F)$ y

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega) \;=\; \Big\{\phi \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \;:\; \phi(\tau g) = \omega(\tau)\cdot\phi(g)\;,\,\text{si } \tau \in \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\Big\}\;.$$

Notamos que $|\omega| = |\cdot|_{\mathbb{A}_F}^{k_0-2}$ y que $|\omega|^{-1}\omega = \chi_\infty\chi_0 : \mathbb{A}_F^\times \to S^1$ es un carácter de $\mathbb{A}_F^\times$ trivial en $F^\times$ y en $\widehat{\mathfrak{o}_F}^\times$. En general, escribiremos χ para denotar dicho carácter. Si $\widehat{\tau} \in \widehat{F}^\times$ y $\mathfrak{t} = \widehat{\tau}\widehat{\mathfrak{o}_F} \cap F$ es el ideal fraccionario determinado por $\widehat{\tau}$, podemos definir

$$\chi(\mathfrak{t}) \;:=\; \chi(\widehat{\tau}) \quad \text{y} \quad \omega(\mathfrak{t}) \;:=\; \omega(\widehat{\tau})\;.$$

El valor de $\chi(\mathfrak{t})$ depende únicamente de la clase de $\mathfrak{t}$ en $\mathrm{Cl}^+(F)$ y $|\omega(\mathfrak{t})| = \mathbb{N}(\mathfrak{t})^{-(k_0-2)}$, donde $\mathbb{N}(\mathfrak{t})$ denota la norma del ideal.

Dado un cuasicarácter $\omega : \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ (trivial en $F^\times$), escribimos $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$, si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es tal que $\phi_f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$. Denotamos por $L^2\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega\big)$ el espacio de funciones medibles $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}^\times$ tales que:[12]

(i) $\phi(\tau g) = \omega(\tau)\cdot\phi(g)$ para todo $\tau \in \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$,

(ii) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ para toda $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$ y

(iii) ϕ es de *cuadrado integrable módulo el centro*, es decir,

$$\int_{\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} |\omega(\det\, g)|^{-1}|\phi(g)|^2\,dg \;<\; \infty\;.$$

[11] Ver, por ejemplo, [16] o [41]

[12] Comparar con [3, Ch. 3]

Si $\omega = \psi \cdot \chi$ y si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$, entonces $\phi = \phi_f$ pertenece a este espacio; lo único que hay que verificar es la última condición. Para ver esto, sean $f_{\mathfrak{a}}$ las componentes dadas por el isomorfismo (III.4.3). El integrando $|\omega(\det(g))|^{-1}|\phi(g)|^2$ es invariante por la acción del centro, es decir, por ρ, con lo cual, la integral anterior está bien definida. Llamemos temporariamente $\tilde{Y}_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ a la componente

$$\tilde{Y}_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;=\; \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n\,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$$

de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$. Con $g_\infty \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n$, $\widehat{u}$ variando en $\widehat{\mathcal{O}}^\times$, $d\theta$ y $d\widehat{u}$ las medidas que cumplen $d\theta(\mathrm{SO}(2)^n) = 1$ y $d\widehat{u}(\widehat{\mathcal{O}}^\times) = 1$ y usando la descomposición de Iwasawa (I.1.2),

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\tilde{Y}_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathcal{O}}^\times)} |\omega(\det(g_\infty\widehat{\alpha}\widehat{u}))|^{-1}|\phi(g_\infty,\widehat{\alpha}\widehat{u})|^2\,dg_\infty\,d\widehat{u}\\
&\quad= \frac{1}{|\omega(\mathfrak{a})|}\int_{\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\tilde{Y}_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathcal{O}}^\times)} \left|\phi\Big(\begin{bmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2}\\ & y^{-1/2}\end{bmatrix} h(\theta),\widehat{\alpha}\widehat{u}\Big)\right|^2 d\mu\,d\theta\,d\widehat{u}\\
&\quad= \mathbb{N}(\mathfrak{a})^{k_0-2}\int_{\Gamma_0(\mathfrak{N},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n/\mathrm{Z}(\mathbb{R})\,\mathrm{SO}(2)^n} \left|f_{\mathfrak{a}}(x+y\mathbf{i})\right|^2 y^{\underline{k}}\,d\mu\ .
\end{aligned}$$

Pero este último término es finito, porque la forma cuspidal $f_{\mathfrak{a}}$ es de cuadrado integrable. Esto demuestra que ϕ_f pertenece al espacio $L^2\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega\big)$. En realidad, $\phi \in L^2_0\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F),\omega\big)$, el subespacio de funciones *cuspidales*.[13] El producto interno en este espacio está dado por

$$\langle\phi,\phi'\rangle \;:=\; \int_{\mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)\,\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)} |\omega(\det\, g)|^{-1}\,\phi(g)\overline{\phi'(g)}\,dg\ , \qquad \text{(III.5.4)}$$

Finalmente, observamos que $\phi(g_\infty,\widehat{g}) = \sum_{\mathfrak{a}} \phi(g_\infty,\widehat{g})\,[\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times](\widehat{g})$, donde $[\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ denota la función característica del conjunto $\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. De esto deducimos que, dadas $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$, se cumple

$$\langle f, g\rangle \;\equiv\; \langle\phi_f,\phi_g\rangle \;=\; \sum_{\mathfrak{a}} \mathbb{N}(\mathfrak{a})^{k_0-2}\,\langle f_{\mathfrak{a}}, g_{\mathfrak{a}}\rangle_{\mathfrak{a}}\ .$$

III.5.2. Una acción a derecha

Será útil, también, traducir y extender la definición de los operadores de peso $\underline{k}$ de $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ a funciones adélicas. Dada $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ y $(h,\widehat{\beta}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, con $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^n$ y $\widehat{\beta} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$, definimos

$$\big(\phi\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta})\big)(g_\infty,\widehat{\alpha}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^n J_i(h_i,\sqrt{-1})^{-1}\right)\phi(g_\infty h^{-1},\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1})\ . \qquad \text{(III.5.5)}$$

[13] Ver (vii) de la Proposición III.18

Esta expresión define una acción del grupo $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$. La propiedad (ii) en la Proposición III.18 se puede expresar entonces

$$\phi\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\beta}) \;=\; \phi \tag{III.5.6}$$

para toda $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$. Si una función ϕ cumple (III.5.6) con $\widehat{\beta}$ variando en algún subgrupo $K \subset \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$, decimos que es invariante a derecha por el grupo K.

Observación III.19. En relación con el producto interno, dado un idèle finito $\widehat{\pi} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ y dadas $\phi, \phi' \in L^2\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F), \omega\big)$, se deduce de (III.5.4) y de (III.5.5) que

$$\langle \phi\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\pi}), \phi' \rangle \;=\; |\omega(\det\,\widehat{\pi})|^{-1}\, \langle \phi, \phi'\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\pi}^{-1}) \rangle \;=\; \overline{\chi(\det\,\widehat{\pi})}\, \langle \phi, \phi'\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\pi}^{\iota}) \rangle \;,$$

donde $\chi = |\omega|^{-1}\,\omega$. La última igualdad es consecuencia de que el conjugado del idèle $\widehat{\pi}$ está dado por $\widehat{\pi}^{\iota} = \det\,(\widehat{\pi})\,\widehat{\pi}^{-1}$.

III.6. Operadores de Hecke

Para cada nivel $\mathfrak{N}$, se definen operadores de Hecke en el espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}\,(\mathfrak{N})$ de formas de Hilbert. Estos operadores son, esencialmente, operadores de convolución en el espacio de formas automorfas de nivel $\mathfrak{N}$ para $\mathrm{GL}_{2/F}$. Es también posible dar una descripción puramente algebraica de estos operadores. Se empezará por esta segunda descripción.

III.6.1. Operadores en el espacio de formas automorfas

Sea $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(\mathfrak{N})$ el orden dado por la expresión (III.1.4) y sea $\widehat{\pi} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$. El grupo de unidades $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ actúa a izquierda en el conjunto $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ por multiplicación. En particular, eligiendo un sistema de representantes, $\{\widehat{\pi}_i\}_i$, es posible descomponer $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ en una unión disjunta:

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \;=\; \bigsqcup_i \widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}_i \;. \tag{III.6.1}$$

Ahora bien, la multiplicación $(\widehat{\alpha},\widehat{\beta}) \mapsto \widehat{\alpha}\widehat{\beta}$ en $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ es una aplicación continua, las traslaciones $\widehat{\alpha} \mapsto \widehat{\alpha}\widehat{\beta}$ son homeomorfismos y el grupo de unidades $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ es un subespacio abierto y compacto. Por lo tanto, el conjunto $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$, producto de los compactos $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ y $\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$, es compacto y $\big\{\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}_i\big\}_i$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos. En consecuencia, la unión (III.6.1) es finita.

Dada una forma de Hilbert $\phi:\, \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ (no necesariamente cuspidal) de peso $\underline{k}$ y nivel $\mathfrak{N}$, se define una nueva función en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ por la expresión

$$\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}](g,\widehat{\alpha}) \;=\; \sum_i \,\big(\phi\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\pi}_i)\big)(g,\widehat{\alpha}) \;=\; \sum_i \,\phi(g,\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}) \;. \tag{III.6.2}$$

Como ϕ es invariante por la acción de $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ a derecha, esta nueva función está bien definida en el sentido de que la suma es finita y no depende de los representantes $\widehat{\pi}_i$ elegidos.

Proposición III.20. *Sea $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ una función con las propiedades (i) a (vi) de la Proposición III.18 y sea $\widehat{\pi} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$. Entonces la función adélica $\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ también verifica (i) a (vi). Si, además, ϕ verifica (vii), es decir, es cuspidal, entonces la nueva función también es cuspidal.*

En otras palabras, $\phi \mapsto \phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ define un operador en el espacio $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ de formas modulares de Hilbert que se restringe a un operador en el subespacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ de formas cuspidales. Estos operadores también respetan la descomposición (III.5.3) en términos de los cuasicaracteres $\omega : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Demostración. Sea $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ una función que satisface las propiedades (i) a (vi) de III.18. Sea $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$. Entonces

$$\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times](\gamma g, \gamma\widehat{\alpha}) = \sum_i \phi(\gamma g, \gamma\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}) = \sum_i \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}) ,$$

de lo que se deduce que se cumple (i). Por otro lado, de (III.6.2), se deduce que la aplicación $\phi \mapsto \phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ solamente afecta las coordenadas no arquimedianas de ϕ. Por lo tanto, las propiedades (iii), (iv) y (vi) se preservan. En cuanto a (ii), si $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$, entonces

$$\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times](g, \widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1}) = \sum_i \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\pi}_i^{-1}) = \sum_i \phi(g, \widehat{\alpha}(\widehat{\pi}_i\widehat{\beta})^{-1}) .$$

Pero el conjunto $\{\widehat{\pi}_i\widehat{\beta}\}_i$ sigue siendo un conjunto de representantes de las clases en $\widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times$, ya que $\widehat{\pi}_i\widehat{\beta}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}_j\widehat{\beta}$, si y sólo si $\widehat{\pi}_i\widehat{\pi}_j^{-1}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y la finitud de la descomposición (III.6.1) implica que la aplicación inyectiva $\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}_i \mapsto \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}_i\widehat{\beta}$ sea, también, sobreyectiva. Por otra parte, la finitud de la sumatoria correspodiente (III.6.2) implica (v) y, si, además, ϕ cumple con (vii) entonces $\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ también posee esta propiedad. $\square$

Observación III.21. Sea $\widehat{\pi} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$. Sea ω un cuasicarácter de $\mathbb{A}_F^\times$ trivial en $F^\times$ y sean $\phi, \phi' \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times], \phi' \right\rangle &= |\omega(\det \widehat{\pi})|^{-1} \left\langle \phi, \phi'\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times] \right\rangle \\ &= \overline{\chi(\det \widehat{\pi})} \left\langle \phi, \phi'\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}^{\iota}\widehat{\mathcal{O}}^\times] \right\rangle .\end{aligned}$$

Esto se deduce de la expresión (III.6.2) para el operador, de la Observación III.19, elegiendo un sistema de representantes $\{\widehat{\pi}_i\}_i$ tal que $\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \bigsqcup_i \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}_i = \bigsqcup_i \widehat{\pi}_i\widehat{\mathcal{O}}^\times$, y de que $\omega(\det\widehat{x}) = \omega(\det\widehat{\pi})$ para todo $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times$.

Usando el isomorfismo de la Proposición III.18, se traducen las definiciones anteriores al contexto de formas de Hilbert clásicas. Sea $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ una forma de Hilbert y sea ϕ_f la función adélica correspondiente. Entonces

$$\phi_f\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times](g,\widehat{\alpha}) \;=\; \sum_i \phi_f(g,\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}) \;=\; \sum_i \left(\prod_{t=1}^n J_t(g_t,\sqrt{-1})^{-1}\right) f(g\cdot\mathbf{i},\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\;.$$

Se define una función $T_{\widehat{\pi}}f : (\mathfrak{h}^\pm)^n \times \big(\mathrm{GL}_2(\widehat{F})/\widehat{\mathcal{O}}^\times\big) \to \mathbb{C}$ por

$$\big(T_{\widehat{\pi}}f\big)(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;=\; \sum_i f(z,\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\;.$$

Entonces $T_{\widehat{\pi}}f$ es una forma de Hilbert también y $f \mapsto T_{\widehat{\pi}}f$ define un operador en $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. Por la Observación III.21, el adjunto del operador $T_{\widehat{\pi}}$ está dado por

$$T_{\widehat{\pi}}^* \;=\; \chi(\det\widehat{\pi})\,T_{\widehat{\pi}^\iota}\;. \tag{III.6.3}$$

III.6.2. Operadores de convolución

Temporariamente, para no sobrecargar la notación, denotamos $\mathrm{M}_{2\times 2}(F)$ por B. Las combinaciones usuales mantienen el mismo significado, por ejemplo, $B_v^\times = \mathrm{GL}_2(F_v)$, en este caso.

A continuación reinterpretamos el operador asociado a $\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times$ como un operador de convolución. Para cada lugar finito $v \in V_f^F$, sea $du_v^\times$ una medida de Haar en $B_v^\times$. Por ejemplo, para fijar alguna referencia, podemos suponer que $du_v^\times = du_v/|\mathrm{nrd}(x)|_v^2$, donde du_v es la medida de Haar en B_v que cumple con $|\mathcal{O}_0(1)_v| = 1$, donde $\mathcal{O}_0(1) \subset B$ es el orden maximal dado por (III.1.3). Denotamos $d\widehat{u}^\times$ la medida de Haar $\prod_v du_v^\times$ en $\widehat{B}^\times$.

Si $\widehat{\pi} = (\pi_v)_v \in \widehat{B}^\times$, entonces

$$[\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times] \;=\; \prod_v\,[\mathcal{O}_v^\times\pi_v\mathcal{O}_v^\times]\;.$$

Para todo lugar v salvo finitos, $\pi_v \in \mathcal{O}_v^\times$ y $\mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_0(1)_v^\times$ para casi todo v, también. En particular,

$$\mathcal{O}_v^\times\pi_v\mathcal{O}_v^\times \;=\; \mathcal{O}_v^\times \;=\; \mathcal{O}_0(1)_v^\times$$

para casi todo lugar finito v. Esto implica que, dada una forma modular ϕ, la convolución

$$\phi * [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times](g, \widehat{\alpha}) \;=\; \int_{\widehat{B}^\times} \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{u}^{-1})\, [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times](\widehat{u})\, d\widehat{u}^\times \tag{III.6.4}$$

esté definida. De la descomposición (III.6.1), se deduce que

$$\begin{aligned} \phi * [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times](g, \widehat{\alpha}) \;&=\; \sum_i \int_{\widehat{B}^\times} \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{u}^{-1}) [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_i](\widehat{u})\, d\widehat{u}^\times \\ &=\; \sum_i \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}) |\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_i| \ , \end{aligned}$$

donde la medida $|\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_i|$ del trasladado es independiente de $\widehat{\pi}_i$ e igual a $|\widehat{\mathcal{O}}^\times|$ y, en definitiva,

$$\phi\Big|_{\underline{k}} [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times] \;=\; \frac{1}{|\widehat{\mathcal{O}}^\times|}\, \phi * [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times] \ . \tag{III.6.5}$$

Los operadores de convolución $[\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times]$, se factorizan como producto de operadores que actúan en lugares distintos. Dado un lugar v y un elemento $\pi_v \in B_v^\times$, sea $\widehat{\pi_v} \in \widehat{B}^\times$, el idèle dado por $(\widehat{\pi_v})_w = 1$, si $w \neq v$, e igual a π_v en v. Dado $\widehat{\pi} \in \widehat{B}^\times$, escribimos $\tilde{T}_{\widehat{\pi}}\phi = \phi\Big|_{\underline{k}} [\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times]$. Si $\widehat{\pi} = (\pi_v)_v$, sean $w_1, \ldots, w_t \in V_f^F$ los lugares finitos para los cuales $\pi_{w_i} \notin \mathcal{O}_{w_i}^\times$ o $\mathcal{O}_{w_i}^\times \neq \mathcal{O}_0(1)_{w_i}^\times$. Para todo $v \in V_f^F$, se cumple que

$$\big(\tilde{T}_{\widehat{\pi_v}}\phi\big)(g, \widehat{\alpha}) \;=\; \frac{1}{|\mathcal{O}_v^\times|} \int_{\mathcal{O}_v^\times \pi_v \mathcal{O}_v^\times} \phi(g, \widehat{\alpha} h_v^{-1})\, dh_v^\times \ .$$

Si $v \neq w$, vale que $\tilde{T}_{\widehat{\pi_v}} \circ \tilde{T}_{\widehat{\pi_w}} = \tilde{T}_{\widehat{\pi_w}} \circ \tilde{T}_{\widehat{\pi_v}}$, porque $\tilde{T}_{\widehat{\pi_v}}$ y $\tilde{T}_{\widehat{\pi_w}}$ actúan en coordenadas distintas. Además, si $v \notin \{w_1, \ldots, w_t\}$, $\tilde{T}_{\widehat{\pi_v}} = \mathsf{id}$. Así,

$$\tilde{T}_{\widehat{\pi}} \;=\; \tilde{T}_{\widehat{\pi_{w_1}}} \circ \cdots \circ \tilde{T}_{\widehat{\pi_{w_t}}} \ .$$

No volveremos a utilizar la notación $\tilde{T}_{\widehat{\pi}}$ para referirnos a estos operadores.

III.6.3. El álgebra de Hecke

Sean $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_F$ un ideal primo, $p \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}$ un generador del ideal maximal y sea $\pi = \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix}$. Sea $\widehat{p} \in \widehat{F}^\times$ el idèle (íntegro) dado por $\widehat{p}_v = 1$, si $v \neq \mathfrak{p}$, e igual a p en $\mathfrak{p}$; identificamos $\widehat{p}$ con el correspondiente elemento del centro de $\widehat{B}^\times$. Sea $\widehat{\pi} \in \widehat{B}^\times$ el idèle dado por $\widehat{\pi}_v = 1$, si $v \neq \mathfrak{p}$, e igual a π en $\mathfrak{p}$.

Definición III.22. Llamaremos *operadores de Hecke (en $\mathfrak{p}$)* a los operadores

$$T_{\mathfrak{p}} = T_{\widehat{\pi}} \quad \text{y} \quad S_{\mathfrak{p}} = T_{\widehat{p}} \qquad\qquad ((\mathfrak{p}, \mathfrak{N}) = 1)$$

en $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. El *álgebra de Hecke* de $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es el álgebra sobre $\mathbb{C}$ generada por el conjunto $\{T_{\mathfrak{p}}, S_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}\}$ en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}))$.[14] Los operadores de Hecke preservan los espacios de formas cuspidales $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ para cada cuasicarácter ω.

Si $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ son dos primos distintos, dado que actúan en coordenadas distintas, los operadores $T_{\mathfrak{p}}$ y $T_{\mathfrak{q}}$ conmutan. Los operadores $S_{\mathfrak{p}}$ conmutan con $T_{\mathfrak{q}}$, $S_{\mathfrak{q}}$ y también con $T_{\mathfrak{p}}$, porque $\widehat{p}$ es central.

Para poder expresar el operador de Hecke $T_{\mathfrak{p}}$ como un operador de coclase doble, es necesario hallar un conjunto de representantes de las clases $\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \backslash \widehat{\mathcal{O}}^{\times} \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$, con $\widehat{\pi}$ como en la Definición III.22. Como el único lugar en donde $\widehat{\pi}$ no es trivial es el lugar correspodiente al ideal primo $\mathfrak{p}$, será suficiente hallar una descomposición de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \pi \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ como unión disjunta de conjuntos de la forma $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \beta$. Si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$, entonces $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mathrm{GL}(\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}})$ y, tomando un sistema de representantes $\{b_i\}_i$ de las clases $i \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}/(p)$, se verifica

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \bigsqcup_{i \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}/(p)} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \begin{bmatrix} 1 & b_i \\ & p \end{bmatrix} \sqcup \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix} .$$

En cuanto a $S_{\mathfrak{p}}$, notamos simplemente que

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \begin{bmatrix} p & \\ & p \end{bmatrix} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\times} \begin{bmatrix} p & \\ & p \end{bmatrix} .$$

Así, si $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$, entonces $\big(S_{\mathfrak{p}} f\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{p}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})$. En particular, si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$, entonces $S_{\mathfrak{p}} f = \omega(\mathfrak{p})^{-1} \cdot f$.[15]

Observación III.23. Dado $\widehat{p} \in \widehat{\mathfrak{o}_F}$, el idèle $\widehat{\pi}$ pertenece al anillo $\widehat{\mathcal{O}}$. En particular, los elementos de la coclase doble $\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ pertenecen a $\widehat{\mathcal{O}}$ y sus normas reducidas pertenecen a $\widehat{p}\,\widehat{\mathfrak{o}_F}^{\times}$. Recíprocamente, si $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{O}}$ y $\mathrm{nrd}(\widehat{x}) \in \widehat{p}\,\widehat{\mathfrak{o}_F}^{\times}$, entonces $x_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}^{\times}$, si $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, y, por eliminación, existen $v_{\mathfrak{p}}, w_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}})$ tales que $v_{\mathfrak{p}} x_{\mathfrak{p}} w_{\mathfrak{p}} = \pi$. En definitiva,

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^{\times} = \left\{ \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{O}} \, : \, \mathrm{nrd}(\widehat{x}) \in \widehat{p}\,\widehat{\mathfrak{o}_F}^{\times} \right\} .$$

[14]La definición de operadores de Hecke se extiende a los primos divisores del nivel con algunas modificaciones (ver [42], [34]).

[15] En [46], Proposición 2.1, se afirma algo en apariencia distinto: el autovalor de $S_{\mathfrak{p}}$ en una f perteneciente a uno de los espacios análogos a los que aquí denotamos $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ es $\omega(\mathfrak{p})$ en lugar de $\omega(\mathfrak{p})^{-1}$. Esta discrepancia se debe a que nosotros hemos definido la acción de $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ a derecha en funciones por $\phi\big|_{\underline{k}}(1, \widehat{\pi})(g, \widehat{\alpha}) = \phi(g, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1})$, mientras que Shimura define la acción con el conjugado $\widehat{\pi}^{\iota}$ en lugar del inverso. Esta diferencia también aparecerá más adelante cuando describamos el efecto de los operadores $T_{\mathfrak{p}}$ en los coeficientes de Fourier (§ III.6.5).

Escribimos $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})$ para referirnos a este conjunto y notamos que $\mathfrak{I}(\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{x} \widehat{\mathcal{O}}^\times$ para cualquier elemento $\widehat{x} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$. Definimos, también,

$$\Theta(\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}}^\times \backslash \mathfrak{I}(\mathfrak{p}) \ .$$

Proposición III.24. *Los operadores de Hecke $T_\mathfrak{p}$ y $S_\mathfrak{p}$ son normales, si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$.*

Demostración. Notamos que, con $\widehat{\pi}$ y $\widehat{p}$ como en la Definición III.22, $\widehat{p}^\iota = \widehat{p}$ y, por la Observación III.23, $\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}^\iota \widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times$, lo que implica que $T_{\widehat{p}^\iota} = T_{\widehat{p}}$ y que $T_{\widehat{\pi}^\iota} = T_{\widehat{\pi}}$. De la expresión (III.6.3), se deduce que

$$S_\mathfrak{p}^* = \chi(\mathfrak{p})^2 \, S_\mathfrak{p} \quad \text{y} \quad T_\mathfrak{p}^* = \chi(\mathfrak{p}) \, T_\mathfrak{p} \ ,$$

en cada componente $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ $(\chi = |\omega|^{-1} \omega)$. □

Cada espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ es de dimensión finita y la familia de operadores $\{T_\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}\}$ es una familia de operadores normales que conmutan entre sí. Concluimos, entonces, que existen bases ortogonales para los espacios de formas cuspidales conformadas por autofunciones para todos los operadores $T_\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ que no divide al nivel.

III.6.4. Relación con el isomorfismo (III.4.2)

Supongamos elegidos un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ de las clases estrictas de F, $\widehat{a} \in \widehat{F}^\times$ tales que $\mathfrak{a} = \widehat{a}\widehat{\mathfrak{o}_F} \cap F$ y elementos $\widehat{\alpha}$ como en (III.1.6), de manera que $\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$. Dado un representante $\mathfrak{a}$, definimos:

$$\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{a} = \widehat{\alpha} \widehat{\mathcal{O}} \widehat{\alpha}^{-1} \ , \quad \mathcal{O}_\mathfrak{a} = \widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{a} \cap \mathrm{M}_{2\times 2}(F) \quad \text{y} \quad \Gamma_\mathfrak{a} = \Gamma_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) = \widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{a}^\times \cap \mathrm{GL}_2^+(F) \ .$$

Sean $\mathfrak{a}$ un representante, $\mathfrak{p}$ un primo que no divide al nivel $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{O}$ y $\mathfrak{b}$ el ideal en el mismo conjunto de representantes de las clases estrictas tal que $[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}][\mathfrak{p}]^{-1}$ en $\mathrm{Cl}^+(F)$. Sean $\widehat{b}$ y $\widehat{\beta}$ el idèle y la matriz correspondientes al ideal $\mathfrak{b}$. Para cada representante $\widehat{\pi}$ de las órbitas en $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})$, se cumple que $[\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1})] = [\mathfrak{a}][\mathfrak{p}]^{-1} = [\mathfrak{b}]$. Por el Corolario II.31, existe $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ tal que $\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \gamma^{-1}\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. Dada $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$, la forma $T_\mathfrak{p} f$ está determinada por sus proyecciones en cada uno de los espacios $\mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$. De lo mencionado anteriormente y de la invarianza de f, se deduce que

$$\begin{aligned}
\big(T_\mathfrak{p} f\big)_\mathfrak{a}(z) &= \big(T_\mathfrak{p} f\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\widehat{\pi}} f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\gamma} f(z, \gamma^{-1}\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \\
&= \sum_{\gamma} \left(\prod_{i=1}^{n} J_i(\gamma_i, z_i)^{-1} \right) f(\gamma z, \widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\gamma} \big(f_\mathfrak{b}\big|_{\underline{k}} \gamma \big)(z) \ ,
\end{aligned}$$

donde $\widehat{\pi}$ recorre un sistema de representantes de $\Theta(\mathfrak{p})$. Es decir, esencialmente, los operadores de Hecke permutan las componentes de una forma de Hilbert. Esto justifica considerar conjuntamente todas las variedades $Y_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$.

Observación III.25. Dados $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ como arriba, sea

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \;=\; \left\{\delta \in \mathrm{GL}_2^+(F)\;:\;\widehat{\beta}^{-1}\delta\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{O}} \text{ y } \det(\delta)\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}\right\}\,.$$

Llamemos $\widehat{\pi}_i$ a los representantes de $\Theta(\mathfrak{p})$ y γ_i a las matrices correspondientes en $\mathrm{GL}_2^+(F)$. Las matrices $\delta \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ que verifican $\widehat{\alpha}\widehat{x}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \delta^{-1}\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times$ para algún $\widehat{x} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$ son aquellas tales que $\widehat{\beta}^{-1}\delta\widehat{\alpha} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$, es decir, por la Observación III.23, $\widehat{\beta}^{-1}\delta\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{O}}$ y $\det(\delta)\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{p}$. Es decir,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \;=\; \widehat{\beta}\mathfrak{I}(\mathfrak{p})\widehat{\alpha}^{-1} \,\cap\, \mathrm{GL}_2^+(F)\,.$$

Las matrices γ_i pertencen a este conjunto. Si $\delta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, existe un representante $\widehat{\pi}_i$ tal que $\widehat{\beta}^{-1}\delta\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}_i$. Pero $\widehat{\beta}^{-1}\gamma_i\widehat{\alpha}$ también pertenece a esta clase, lo que implica que

$$\delta \;\in\; \left(\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\beta}^{-1}\right)\gamma_i \,\cap\, \mathrm{GL}_2^+(F) \;=\; \Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma_i\,.$$

Recíprocamente, si $\gamma' \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$, entonces $\widehat{\beta}^{-1}\gamma'\gamma_i\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\beta}^{-1}\gamma_i\widehat{\alpha}$, que está contenido en el conjunto $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})$. En definitiva,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \;=\; \bigcup_i \Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma_i\,.$$

La Proposición III.26 garantiza que esta unión es, en realidad, disjunta e igual a una coclase doble en $\mathrm{GL}_2^+(F)$.

Proposición III.26. *Sea $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$ un ideal primo. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos representantes de las clases estrictas de F tales que $[\mathfrak{a}][\mathfrak{p}]^{-1} = [\mathfrak{b}]$. Sea $\{\widehat{\pi}_i\}_i$ un sistema de representantes de las clases en $\widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y, para cada i, sea $\gamma_i \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ tal que $\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \gamma_i^{-1}\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. Entonces*

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \;=\; \bigsqcup_i \Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma_i \;=\; \Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma\Gamma_{\mathfrak{a}}\,,$$

donde γ es cualquier elemento en el conjunto $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$.

Demostración. Ver [35, Thm. 5.3.5] para el caso $F = \mathbb{Q}$, o bien [44, Propo. 2.3]. □

Recíprocamente, dada cualquier $\gamma \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, si $\{\gamma_i\}_i$ es un sistema de representantes de las clases en $\Gamma_{\mathfrak{b}}\backslash\Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma\Gamma_{\mathfrak{a}}$, entonces $\{\widehat{\pi}_i = \widehat{\beta}^{-1}\gamma_i\widehat{\alpha}\}_i$ es un sistema de representantes de las clases en $\widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^\times$. Dicho de otra manera, el grupo de unidades $\Gamma_{\mathfrak{b}}$ actúa a izquierda en $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ y la Proposición III.26 afirma que la aplicación $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$ dada por $\delta \mapsto \widehat{\beta}^{-1}\delta\widehat{\alpha}$ induce una biyección

$$\Gamma_{\mathfrak{b}}\backslash\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \;\xrightarrow{\sim}\; \widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\mathfrak{I}(\mathfrak{p})\,.$$

Denotamos por $\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ el conjunto de órbitas $\Gamma_{\mathfrak{b}}\backslash\mathfrak{I}(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$.

Observación III.27. Los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}} : \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \to \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ actúan por bloques permutando los sumandos de la descomposición (III.4.2). Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$ e ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ tales que $[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}][\mathfrak{p}]^{-1}$ en $\mathrm{Cl}^+(F)$, definimos

$$(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \to \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$$

por

$$(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f = \sum_{\gamma \in \Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} f\big|_{\underline{k}}\gamma \ , \tag{III.6.6}$$

Entonces, dada $f = (f_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}} \in \mathcal{M}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$, se cumple $\left(T_{\mathfrak{p}} f\right)_{\mathfrak{a}} = (T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{b}}$. El operador $T_{\mathfrak{p}}$ actúa como la matriz de operadores $\left[(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ recorren los representantes de las clases estrictas de F y $(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ es el operdor definido por (III.6.6), si $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}\mathfrak{p}]$, y es igual a cero, en otro caso. En términos de una descomposición $\Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma\Gamma_{\mathfrak{a}} = \bigsqcup_i \Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma_i$, vale que $(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f = f\Big|_{\underline{k}}[\Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma\Gamma_{\mathfrak{a}}]$, donde

$$f\Big|_{\underline{k}}[\Gamma_{\mathfrak{b}}\gamma\Gamma_{\mathfrak{a}}] = \sum_i f\big|_{\underline{k}}\gamma_i \ . \tag{III.6.7}$$

III.6.5. Relación con los coeficientes de Fourier

Nuevamemnte, supongamos dados un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ de las clases estrictas de F y elementos $\widehat{a}$ y $\widehat{\alpha}$ como en § III.6.4. A continuación describimos la acción de los operadores $T_{\mathfrak{p}}$ en términos de los coeficientes de Fourier de $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ (definidos por (III.4.6)).

Elegimos un sistema de representantes $\{x_j\}_j \subset \mathfrak{o}_F$ del cuerpo residual $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$. Así,

$$\left\{ \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_j \\ & p \end{bmatrix} \right\}_j$$

es un sistema de representantes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times \pi \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$ por la acción a izquierda de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times$, como en la Sección § III.6.3. Identificamos estos elementos con sus imágenes por la inclusión en $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ y prescindimos de la notación $\widehat{\cdot}$ para indicar la parte finita. Notamos que

$$\begin{bmatrix} a & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_j \\ & p \end{bmatrix}^{-1} = p^{-1} \begin{bmatrix} pa & -ax_j \\ & 1 \end{bmatrix}$$

y afirmamos que la matriz del lado derecho se puede descomponer de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} pa & -ax_j \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\mu_0 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 a' u & \lambda_0 a' v - \mu_0 \\ & 1 \end{bmatrix} , \tag{III.6.8}$$

donde λ_0, μ_0 son las partes finitas de ciertos $\lambda \in F_+^\times$ y $\mu \in F$, respectivamente, $u \in \widehat{\mathfrak{o}_F}^\times$ y $v \in \widehat{\mathfrak{o}_F}$. Por un lado, existe un único representante $\mathfrak{a}'$ tal que $[\mathfrak{p}\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}']$. En particular, existen $\lambda \in F_+^\times$ y $u \in \widehat{\mathfrak{o}_F}^\times$ tales que $pa = \lambda_0 a' u$, donde a' es el idèle correspondiente a $\mathfrak{a}'$. Por otro lado, un elemento $\mu \in F$ satisface $\mu_0 = a x_j + (pau^{-1})\, v$, con $v \in \widehat{\mathfrak{o}_F}$, si y sólo si $\mu \in \mathfrak{a}$ y $\mu_\mathfrak{p} \equiv a x_j \pmod{\mathfrak{p}}$. Esto equivale a poder elegir representantes de $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}\mathfrak{a}$. Esto muestra que la descomposición (III.6.8) es válida.

Sea $\mathfrak{a}$ un representante arbitrario de las clases estrictas de F y sean $\mathfrak{b}, \mathfrak{a}'$ los únicos representantes que verifican $[\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}] = [\mathfrak{b}]$ y $[\mathfrak{a}\mathfrak{p}] = [\mathfrak{a}']$. Fijamos, para cada $\mathfrak{a}$, elementos totalmente positivos $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}} \in F_+^\times$ tales que $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{b}$ y $\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$. Para cada representante x_j de $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}$, sea $\mu_j \in F$ tal que $(\mu_j)_0 = (\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}})_0 a' v + a x_j$, como en (III.6.8). Dada $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$,

$$
\begin{aligned}
\big(T_\mathfrak{p} f\big)_\mathfrak{a}(z) \;&=\; f\Big(z, \begin{bmatrix} a & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1} \widehat{\mathcal{O}}^\times\Big) \;+\; \sum_j f\Big(z, \begin{bmatrix} a & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_j \\ & p \end{bmatrix}^{-1} \widehat{\mathcal{O}}^\times\Big) \\
&=\; f\Big(z, \begin{bmatrix} (\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})_0 & \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b & \\ & 1 \end{bmatrix} \widehat{\mathcal{O}}^\times\Big) \;+\; \sum_j f\Big(z, p^{-1} \begin{bmatrix} (\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}})_0 & -(\mu_j)_0 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & \\ & 1 \end{bmatrix} \widehat{\mathcal{O}}^\times\Big) \\
&=\; \Big(f_\mathfrak{b}\big|_{\underline{k}} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} & \\ & 1 \end{bmatrix}\Big)(z) \;+\; \sum_j \omega(\mathfrak{p})^{-1} \Big(f_{\mathfrak{a}'}\big|_{\underline{k}} \begin{bmatrix} \lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}^{-1} & \lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}^{-1}\mu_j \\ & 1 \end{bmatrix}\Big)(z)\;.
\end{aligned}
$$

Expandiendo el operador de peso $\underline{k}$ y reemplazando cada función por su desarrollo de Fourier,

$$
\begin{aligned}
\big(T_\mathfrak{p} f\big)_\mathfrak{a}(z) \;=\; &\Big(\prod_{i=1}^n (\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})_i^{k_i+m_i-1}\Big) \sum_{\nu \in \mathfrak{b}_+^\perp} a_\nu(f_\mathfrak{b})\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} z)} \\
&+\; \omega(\mathfrak{p})^{-1} \sum_j \Big(\prod_{i=1}^n (\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}})_i^{k_i+m_i-1}\Big)^{-1} \sum_{\nu \in \mathfrak{a}'^\perp_+} a_\nu(f_{\mathfrak{a}'})\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\nu \lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}^{-1}(z+\mu_j))}\;.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $\nu \in \mathfrak{b}^\perp$, si y sólo si $\nu\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \in (\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1})^\perp$ y $\nu \in \mathfrak{a}'^\perp$, si y sólo si $\nu\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}^{-1} \in (\mathfrak{a}\mathfrak{p})^\perp$. De esta manera, por la expresión (III.4.5) para los coeficientes de Fourier,

$$
\begin{aligned}
\big(T_\mathfrak{p} f\big)_\mathfrak{a}(z) \;=\; &\sum_{\xi \in (\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1})_+^\perp} \Big(\prod_{i=1}^n \xi_i^{k_i+m_i-1}\Big)\, \tilde{c}(\xi\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1}, f_\mathfrak{b})\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\xi z)} \\
&+\; \omega(\mathfrak{p})^{-1} \sum_{\xi \in (\mathfrak{a}\mathfrak{p})_+^\perp} \Big(\prod_{i=1}^n \xi_i^{k_i+m_i-1}\Big)\, \tilde{c}(\xi\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}, f_{\mathfrak{a}'})\, S(\xi)\, e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\xi z)}\;,
\end{aligned}
$$

donde $S(\xi) = \sum_j e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\xi\mu_j)}$. Dado que los elementos μ_j son representantes de $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}\mathfrak{a}$, si $\xi \in \mathfrak{a}^\perp$, entonces $\mathrm{Tr}(\xi\mu_j) \in \mathbb{Z}$ y $S(\xi) = |\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}| = \mathbb{N}(\mathfrak{p})$.

Sea, ahora, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}_F$ un ideal íntegro. Existen $\nu \in F_+^\times$ y $\mathfrak{a}$ tales que $\mathfrak{m} = \nu \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Como habíamos observado al definir los coeficientes de Fourier, esto implica que $\nu \in$

$(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1} = \mathfrak{a}^{\perp}$ y que $\nu \gg 0$. Para determinar el coeficiente $c(\mathfrak{m}, T_{\mathfrak{p}} f)$ será necesario hallar $a_\nu\big(\big(T_{\mathfrak{p}} f\big)_{\mathfrak{a}}\big)$. Recordamos que $\mathfrak{a}^{\perp} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$. Entonces, se puede verificar que el elemento ν pertenece a $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1})^{\perp} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}^{\perp}$, si y sólo si $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$. Por otra parte, $(\mathfrak{a}\mathfrak{p})^{\perp}$ siempre contiene a $\mathfrak{a}^{\perp}$, independientemente de $\mathfrak{m}$. De la expresión para $\big(T_{\mathfrak{p}} f\big)_{\mathfrak{a}}$, se deduce que

$$c(\mathfrak{m}, T_{\mathfrak{p}} f) \;=\; \tilde{c}\big(\nu, \big(T_{\mathfrak{p}} f\big)_{\mathfrak{a}}\big) \;=\; \tilde{c}(\nu\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1}, f_{\mathfrak{b}})\,\mathbf{1}(\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}) \;+\; \omega(\mathfrak{p})^{-1}\, S(\nu)\, \tilde{c}(\nu\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}, f_{\mathfrak{a}'}) \;,$$

donde $\mathbf{1}(\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m})$ toma el valor 1, si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$, y el valor 0 en otro caso. Pero $\nu \in \mathfrak{a}^{\perp}$ implica $S(\nu) = \mathbb{N}(\mathfrak{p})$. También,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\nu\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1}, f_{\mathfrak{b}}) \;&=\; c(\nu\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{d}, f) \;=\; c(\mathfrak{p}^{-1}\nu\mathfrak{a}\mathfrak{d}, f) \;=\; c(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f) \quad \text{y} \\ \tilde{c}(\nu\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}, f_{\mathfrak{a}'}) \;&=\; c(\nu\lambda_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}\mathfrak{a}'\mathfrak{d}, f) \;=\; c(\mathfrak{p}\nu\mathfrak{a}\mathfrak{d}, f) \;=\; c(\mathfrak{p}\mathfrak{m}, f) \;. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$c(\mathfrak{m}, T_{\mathfrak{p}} f) \;=\; c(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f) \;+\; \omega(\mathfrak{p})^{-1}\, \mathbb{N}(\mathfrak{p})\, c(\mathfrak{p}\mathfrak{m}, f) \;. \tag{III.6.9}$$

El término $c(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f)$ es nulo, si $\mathfrak{p}$ no divide a $\mathfrak{m}$.[16]

III.7. Formas viejas, formas nuevas

Las formas de Hilbert admiten una teoría de formas nuevas similar a la teoría para formas modulares elípticas. Aquí incluimos algunos resultados de esta teoría que sirven como fundamento para los métodos explícitos descriptos más adelante. Tomamos como referencia principal [42]. Otra referencia importante es [34].

Dados dos subgrupos compactos y abiertos K_1 y K_2 de $\mathrm{GL}_2(\widehat{F})$ y dado $\widehat{\pi} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{F})$, al igual que en el caso $K_1 = K_2 = \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$, la coclase doble $K_1\widehat{\pi}K_2$ es un conjunto compacto y, al ser K_1 abierto, $K_1\backslash K_1\widehat{\pi}K_2$ es finito. Esto quiere decir, como antes, que existe un conjunto finito $\{\widehat{\pi}_i\}_i$ tal que

$$K_1\widehat{\pi}K_2 \;=\; \bigsqcup_i K_1\widehat{\pi}_i \;.$$

Si $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ es una función que verifica $\phi\big|_{\underline{k}}(1, \widehat{\beta}) = \phi$ para toda $\widehat{\beta} \in K_1$, entonces definimos una nueva función $\phi\Big|_{\underline{k}}[K_1\widehat{\pi}K_2]$ por una expresión análoga a (III.6.2).

[16] Si se compara la expresión (III.6.9) con la fórmula (2.20) en [46], se puede observar otra diferencia, además de la mencionada en la nota 15 (pág. 52). En la fórmula obtenida más arriba, el cuasicarácter ω aparece multiplicando el coeficiente $c(\mathfrak{p}\mathfrak{m}, f)$, mientras que, en [46], Shimura muestra que el factor análogo aparece junto al coeficiente $c(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{m}, f)$. En este caso, la diferencia está en la elección de idèles $\widehat{\alpha} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ asociados a cada representante $\mathfrak{a}$ de las clases estrictas. Si en lugar de $\widehat{\alpha}$ hubiésemos elegido los adjuntos $\widehat{\alpha}^{\iota}$, se hubiese llegado a una expresión más parecida la ecuación citada.

Observación III.28. Esta definición no depende de la elección de los representantes $\widehat{\pi}_i$. Además, si $\widehat{\beta} \in K_2$, entonces

$$\left(\phi\Big|_{\underline{k}}[K_1\widehat{\pi}K_2]\right)\big|_{\underline{k}}(1,\widehat{\beta}) \;=\; \phi\Big|_{\underline{k}}[K_1\widehat{\pi}K_2]\;. \tag{III.7.1}$$

La demostración de esta afirmación es análoga a la de la afirmación correspondiente en la Proposición III.20 (propiedad (ii)). Más aun, si $\phi:\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$ verifica las propiedades (i) a (vi) de la Proposición III.18 (reemplazando (ii) por la condición análoga de que ϕ sea invariante a derecha por K_1) entonces $\phi\Big|_{\underline{k}}[K_1\widehat{\pi}K_2]$ verifica (i) a (vi). Si ϕ es, además, cuspidal, entonces $\phi\Big|_{\underline{k}}[K_1\widehat{\pi}K_2]$ es cuspidal, también.

Sean, ahora, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{l}$ ideales íntegros de $\mathfrak{o}_F$ con $\mathfrak{l}$ primo y tales que $\mathfrak{N}=\mathfrak{l}\mathfrak{M}$. Sean $\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})$ y $\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})$ los órdenes de Eichler en $\mathrm{M}_{2\times 2}(F)$ y sea $\phi:\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\to\mathbb{C}$ una función invariante a derecha por $\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}$. Fijemos $\widehat{l}\in\widehat{\mathfrak{o}_F}$ tal que $\mathfrak{l}=\widehat{l}\widehat{\mathfrak{o}_F}\cap F$ y $\widehat{\lambda}=\begin{bmatrix}\widehat{l} & \\ & 1\end{bmatrix}$. Para obtener una función invariante por la acción del compacto $\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}$ a partir de ϕ, observamos que

$$\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}\;\subset\;\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\quad\text{y que}\quad\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}\;=\;\widehat{\lambda}^{-1}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{\lambda}\cap\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\;.$$

Llamando $\widehat{1}$ al idèle que es la identidad en todos los lugares,

$$\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{1}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}\;=\;\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{1}\quad\text{y}\quad\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{\lambda}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}\;=\;\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{\lambda}\;.$$

Definimos inclusiones ι_1 y $\iota_{\mathfrak{l}}$ respectivamente por

$$\begin{aligned}\big(\iota_1\phi\big)(g,\widehat{\alpha})\;&=\;\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{1}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}](g_\infty,\widehat{\alpha})\;=\;\phi(g_\infty,\widehat{\alpha})\quad\text{y}\\ \big(\iota_{\mathfrak{l}}\phi\big)(g,\widehat{\alpha})\;&=\;\phi\Big|_{\underline{k}}[\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{M})}^{\times}\widehat{\lambda}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times}](g_\infty,\widehat{\alpha})\;=\;\phi(g_\infty,\widehat{\alpha}\widehat{\lambda}^{-1})\;.\end{aligned}$$

Trasladando estas definiciones hacia el lado de las formas de Hilbert, identificamos funciones en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ que vienen de niveles *más bajos.* Si $f\in\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})$ es una forma de Hilbert (cuspidal) de nivel $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}=\mathfrak{l}\mathfrak{M}$, con $\mathfrak{l}$ un ideal primo de $\mathfrak{o}_F$, entonces las expresiones

$$\begin{aligned}\big(\iota_1 f\big)(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times})\;&=\;\left(\prod_{i=1}^{n}J_i(g_i,\sqrt{-1})\right)\phi_f(g_\infty,\widehat{\alpha})\quad\text{e}\\ \big(\iota_{\mathfrak{l}} f\big)(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}_0(\mathfrak{N})}^{\times})\;&=\;\left(\prod_{i=1}^{n}J_i(g_i,\sqrt{-1})\right)\phi_f(g_\infty,\widehat{\alpha}\widehat{\lambda}^{-1})\;,\end{aligned}$$

donde $g_\infty\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^n$ es tal que $g_\infty\cdot\mathbf{i}=z$, determinan elementos del espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$.

Definición III.29. Dado un ideal primo $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{o}_F$ divisor de $\mathfrak{N}$, una forma de Hilbert cuspidal en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es una *forma vieja en* $\mathfrak{l}$, si es combinación lineal de formas del tipo $\iota_1 f$ y $\iota_{\mathfrak{l}} f$ con $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})$, donde $\mathfrak{l}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. El *subespacio de formas viejas en* $\mathfrak{l}$ se define como

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{old}} := \iota_1\left(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})\right) + \iota_{\mathfrak{l}}\left(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})\right) \text{ y}$$

el *subespacio de formas viejas* en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es el subespacio

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{old}} := \sum_{\mathfrak{l}|\mathfrak{N}} \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{old}} .$$

El *subespacio de formas nuevas en* $\mathfrak{l}$ se define como el complemento ortogonal

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{new}} := \left(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{old}}\right)^{\perp}$$

respecto del producto interno de Petersson y el *subespacio de formas nuevas* es

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{new}} := \bigcap_{\mathfrak{l}|\mathfrak{N}} \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{new}} = \left(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathrm{old}}\right)^{\perp} .$$

Sean $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{M}$ como en la definición III.29 y sea $\mathfrak{N} = \mathfrak{l}\mathfrak{M}$. Sea $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$ y sean $T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{N}}$ y $T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{M}}$ los operadores de Hecke asociados al primo $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ y en $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})$, respectivamente. Estos operadores están definidos de la misma manera. Es decir, dado que $\mathfrak{p}$ es coprimo con $\mathfrak{N}$, es coprimo con $\mathfrak{M}$ y si $\{\widehat{\pi}_i\}_i$ es un sistema de representantes de $\mathfrak{I}(\mathfrak{p})$ en nivel $\mathfrak{M}$, entonces el mismo conjunto es un sistema de representantes en nivel $\mathfrak{N}$. Así, si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{M})$, entonces

$$T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{N}}(\iota_1 f) = \iota_1(T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{M}} f) \quad \text{y} \quad T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{N}}(\iota_{\mathfrak{l}} f) = \iota_{\mathfrak{l}}(T_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{M}} f) ,$$

ya que los idèles que aparecen en las definiciones de ι_1, $\iota_{\mathfrak{l}}$ y los operadores $T_{\mathfrak{p}}$ conmutan entre sí. Un argumento análogo muestra que $S_{\mathfrak{p}}$ también conmuta con las inclusiones ι_1 e $\iota_{\mathfrak{l}}$. De esto se deduce que los operadores de Hecke y sus adjuntos preservan los espacios de formas viejas. En consecuencia, los espacios de formas nuevas también son invariantes por los operadores de Hecke para todos los primos $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$.

Teorema III.30 ([42, Thm. 3.1])**.** *Sea $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)$ y sean $c(\mathfrak{m}, f)$ sus coeficientes de Fourier. Si existe un ideal íntegro $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{o}_F$ tal que $c(\mathfrak{m}, f) = 0$ siempre que $(\mathfrak{m}, \mathfrak{l}) = 1$, entonces $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)^{\mathrm{old}}$.*

Definición III.31. Decimos que una forma cuspidal f es una *forma nueva*, si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \omega)^{\mathrm{new}}$ y f es una autofunción de $T_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$.

Si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$ es una forma nueva y $T_{\mathfrak{p}} f = \lambda_{\mathfrak{p}} f$, entonces los coeficientes de Fourier de f verifican la relación

$$c(\mathfrak{p}, f) \;=\; \lambda_{\mathfrak{p}}\, c(\mathfrak{o}_F, f)\ , \tag{III.7.2}$$

para todo $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$. En particular, $c(\mathfrak{o}_F, f) \neq 0$. Decimos que una forma nueva f *está normalizada* (o que f es una forma (nueva) *normalizada*), si $c(\mathfrak{o}_F, f) = 1$.

Corolario III.32. *Si* $f, g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)^{\mathrm{new}}$ *son dos formas nuevas normalizadas y con los mismos autovalores, entonces* $f = g$.

Demostración. Es consecuencia de III.30 con $\mathfrak{l} = \mathfrak{N}$. □

El resultado anterior se puede expresar diciendo que *dentro de cada espacio* $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$ vale la propiedad de *multiplicidad uno* para formas nuevas. El espacio $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)^{\mathrm{new}}$ admite una base ortogonal de formas nuevas que podemos asumir normalizadas; cada una de estas autofunciones tiene asociado un *sistema de autovalores*: $\{a_{\mathfrak{p}}(f)\}_{\mathfrak{p}}$ (en principio, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$), donde $a_{\mathfrak{p}} = c(\mathfrak{p}, f)$; dos formas nuevas determinan el mismo sistema de autovalores, si una es un múltiplo de la otra. Pero el Corolario III.32 no dice nada en el caso en que f y g pertenezcan a espacios asociados a caracteres diferentes. El siguiente resultado resulve este problema.

Teorema III.33 (ver [42, Thm. 3, 6])**.** *Sean* $\omega, \omega' : \mathbb{A}_F^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ *cuasicaracteres triviales en* $F^{\times}$. *Sean* $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega)$ *y* $g \in \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\omega')$ *formas nuevas (normalizadas) con los mismos autovalores para* $T_{\mathfrak{p}}$ *para todo primo* $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{N}$ *(equivalentemente,* $c(\mathfrak{m}, f) = c(\mathfrak{m}, g)$ *para todo ideal íntegro* $\mathfrak{m}$ *tal que* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{N}) = 1$*). Entonces* $\omega = \omega'$ *y* $f = g$.

Capítulo IV

Formas modulares cuaterniónicas

Comenzamos este capítulo asociando un objeto geométrico a un orden de Eichler de nivel $\mathfrak{N}$ en un álgebra de cuaterniones B/F sobre un cuerpo de números totalmente real. Estos objetos se denominan variedades de Shimura cuaterniónicas. Estas variedades son compactas, si y sólo si B es un álgebra de división y esta propiedad se ve reflejada en la definición de las formas automorfas (modulares) correspondientes. Luego de introducir una representación del grupo de unidades $B^\times$, definimos las formas modulares asociadas a esta representación. Como en el caso de las formas de Hilbert, existe una correspondencia entre formas modulares cuaterniónicas y cierto espacio de formas automorfas.

La correspondencia de Jacquet-Langlands, Teorema IV.7, permite reconstruir el módulo de Hecke $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ a partir de espacios de formas cuaterniónicas. Éste es el resultado fundamental en el que se basan los métodos para el cálculo de las formas de Hilbert descriptos en el Capítulo V, ya que reduce el problema de determinar la acción de los operadores $T_\mathfrak{p}$ al cálculo de los mismos en el espacio de formas modulares cuaterniónicas. La naturaleza de la correspondencia impone ciertas restricciones a la aplicabilidad de estos métodos.

IV.1. Variedades de Shimura cuaterniónicas

Sea F un cuerpo de números totalmente real de grado $[F:\mathbb{Q}] = n$ y sea B/F un álgebra de cuaterniones. Cada una de las completaciones F_v con $v \in V_\infty^F$ se identifica con $\mathbb{R}$ y B_v con un álgebra de cuaterniones real. Entonces, o bien $B_v \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un álgebra de matrices, o bien $B_v \simeq \mathbb{H}$; en el primer caso, decimos que el lugar v *es no ramificado*, o que B no ramifica en v, y, en el segundo, decimos que v *es ramificado*, o que B ramifica en v. Sean $v_1, \ldots, v_n$ los lugares arquimedianos de F y supongamos que están ordenados de manera que, entre ellos, los lugares en donde B ramifica son $v_{r+1}, \ldots, v_n$. Sea $\mathcal{O}$ un orden de B y sea $\mathbb{A}_B^\times$ el grupo de idèles de B. Entonces $\mathbb{A}_B^\times = B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times$, donde

$$B_\infty^\times \;=\; \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^r \times (\mathbb{H}^\times)^{n-r} \tag{IV.1.1}$$

y $\widehat{B}^\times$ es el producto restringido de $B_v^\times$ respecto de los subgrupos compactos y abiertos $\mathcal{O}_v^\times$, donde v recorre el conjunto de lugares finitos de F. Notemos que, si en vez de $\mathcal{O}$, eligiésemos otro orden $\mathcal{O}'$ de B en principio distinto, por la Proposición II.18, $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}'_v$ para casi todo $v \in V_f^F$, con lo cual obtendríamos la misma álgebra $\widehat{B}^\times$.

Supongamos que B/F es un álgebra indefinida distinta del álgebra de matrices, es decir, $r \geq 1$ y $B \not\simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(F)$. La acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathfrak{h}^\pm$ se extiende a una acción de $B_\infty^\times$ sobre el producto cartesiano $(\mathfrak{h}^\pm)^r$: si $g_\infty = (g_{v_1}, \ldots, g_{v_n}) \in B_\infty^\times$ y $z = (z_1, \ldots, z_r) \in (\mathfrak{h}^\pm)^r$ definimos

$$g_\infty \cdot z \;=\; (g_{v_1} z_1, \ldots, g_{v_r} z_r) \; . \tag{IV.1.2}$$

Sea $C_{\mathbf{i}}^B \subset B_\infty^\times$ el estabilizador del punto $\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) \in (\mathfrak{h}^\pm)^r$. Como la acción (IV.1.2) es transitiva, podemos identificar $(\mathfrak{h}^\pm)^r = B_\infty^\times / C_{\mathbf{i}}^B$ vía

$$g_\infty \in B_\infty^\times \;\mapsto\; g_\infty \cdot \mathbf{i} \; .$$

El subgrupo estabilizador del punto $\mathbf{i}$ viene dado por

$$C_{\mathbf{i}}^B \;=\; \mathrm{Z}(\mathbb{R}) \left(\mathrm{SO}(2)^r \times (\mathbb{H}^1)^{n-r}\right) \; ,$$

donde $\mathrm{Z}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \times \cdots \times \mathbb{R}^\times$ –un factor por cada lugar arriba de ∞– es el centro de $B_\infty^\times$, $\mathbb{H}^1 = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x}x = x\bar{x} = 1\}$ es el grupo de unidades de norma 1 en el álgebra de Hamilton y $\mathrm{SO}(2)$ es el grupo ortogonal especial.

Sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler. Entonces

$$\mathbb{A}_B^\times \;=\; B_\infty^\times \,\times\, \widehat{B}^\times \;=\; \bigsqcup_g B^\times g B_\infty^\times \widehat{\mathcal{O}}^\times \; , \tag{IV.1.3}$$

donde $g = (g_v)_v \in \widehat{B}^\times$ recorre un sistema de representantes en correspondencia con el conjunto de clases $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$ –que es finito, según el Corolario II.29. Sea $B_{\infty,+}^\times \subset B_\infty^\times$ el subgrupo de elementos cuyas coordenadas tienen norma reducida positiva, es decir,

$$B_{\infty,+}^\times \;=\; \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^r \times (\mathbb{H}^\times)^{n-r} \subset B_\infty^\times \; . \tag{IV.1.4}$$

Por (IV.1.1), (IV.1.4) y la igualdad $\mathrm{nrd}(B^\times) = F_{(+)}^\times$ (ver el Teorema II.21), pasando al cociente en (IV.1.3), se deduce, reemplazando $B_\infty^\times$ por $B_{\infty,+}^\times$ (y $\mathfrak{h}^\pm$ por $\mathfrak{h}$), que

$$\begin{aligned} B^\times \backslash B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times / C_{\mathbf{i}}^B \widehat{\mathcal{O}}^\times \;&\simeq\; B_+^\times \backslash (\mathfrak{h}^r \times (\widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times)) \\ &=\; \bigsqcup_g \Gamma_g \backslash g\mathfrak{h}^r \; , \end{aligned}$$

donde ahora g recorre un sistema de representantes en correspondencia con $\mathrm{Cl}^+(F)$ el grupo de clases estrictas de F y $\Gamma_g = g(B_\infty^\times \widehat{\mathcal{O}}^\times)g^{-1} \cap B_+^\times$ es un subgrupo discreto de $B_{\infty,+}^\times$ actuando en $\mathfrak{h}^r$. Este cociente es la *variedad de Shimura cuaterniónica (de nivel* $\mathfrak{N}$*)* asociada a B y al orden de Eichler $\mathcal{O}$. Es una variedad compleja de dimensión r y, salvo que $\#\mathrm{Cl}^+(F) = 1$, no es conexa. La denotaremos $X_0^B(\mathfrak{N})$. Si el número de lugares del infinito no ramificados es $r = 1$, entonces se obtiene una curva. En general, si B es de división, $X_0^B(\mathfrak{N})$ es una variedad compacta.

Observación IV.1. Dado un ideal de F, $\mathfrak{a}$, se puede elegir un elemento $\widehat{a} \in \widehat{\mathfrak{o}_F}$ tal que

$$\mathfrak{a} = \widehat{a}\widehat{\mathfrak{o}_F} \cap F \ . \tag{IV.1.5}$$

Este idèle está determinado salvo una unidad en $\widehat{\mathfrak{o}_F}^\times$. Luego, existe $\widehat{\alpha} \in \widehat{B}^\times$ tal que $\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$, pues la norma reducida es sobreyectiva en las componentes no arquimedeanas. A $\widehat{\alpha}$ le asociamos, una familia de retículos locales $\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}$, un retículo global $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}$ y un grupo $\Gamma_{\widehat{\alpha}}$ de la siguiente manera:

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}} = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}^{-1} \ , \quad \mathcal{O}_{\widehat{\alpha}} = \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}} \cap B \quad \text{y} \quad \Gamma_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{O}_{\widehat{\alpha},+}^\times = \mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}^\times \cap B_+^\times \ . \tag{IV.1.6}$$

El retículo $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}$ es un orden de Eichler de nivel igual al nivel de $\mathcal{O}$; ambos órdenes son *localmente* conjugados, pero no necesariamente conjugados por un elemento de $B^\times$. El grupo $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha},+}^\times$ es el grupo de unidades "totalmente positivas" del orden $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}$. Cambiando $\widehat{\alpha}$ por otro elemento perteneciente a la misma clase en $B_+^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$, se obtiene un orden de B conjugado a $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}$ por un elemento de $B_+^\times$. Por esta razón, utilizaremos, principalmente, un subíndice $\mathfrak{a}$ en lugar de $\widehat{\alpha}$.

La elección de los representantes g en la descomposición de $X_0^B(\mathfrak{N})$ se puede hacer explícita en el siguiente sentido. En primer lugar, se determina un sistema de representantes de $\mathrm{Cl}^+(F)$, $\{\mathfrak{a}\}_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}^+(F)}$. Quedan determinados conjuntos $\{\widehat{a}\}_\mathfrak{a} \subset \widehat{\mathfrak{o}_F}$ y $\{\widehat{\alpha}\}_\mathfrak{a} \subset \widehat{B}^\times$, los órdenes $\mathcal{O}_\mathfrak{a}$ y los grupos $\Gamma_\mathfrak{a}$ según la Observación IV.1. Realizadas estas elecciones, la variedad de Shimura $X_0^B(\mathfrak{N})$ se identifica con una unión disjunta de variedades conexas:

$$\begin{aligned} X_0^B(\mathfrak{N}) = \bigsqcup_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}^+(F)} B_+^\times \backslash \big(\mathfrak{h}^r \times \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times\big) &\simeq \bigsqcup_{[\mathfrak{a}]\in \mathrm{Cl}^+(F)} \Gamma_\mathfrak{a} \backslash \mathfrak{h}^r \\ B_+^\times(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) &\mapsto \Gamma_\mathfrak{a} z \ . \end{aligned} \tag{IV.1.7}$$

Cada una de estas componentes es compacta, lo que implica que $X_0^B(\mathfrak{N})$ es compacta.

Observación IV.2. De hecho, si $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}^1 = \{x \in \mathcal{O}_{\widehat{\alpha}} \,:\, \mathrm{nrd}(x) = 1\}$, el cociente $\mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}^1 \backslash \mathfrak{h}^r$ es compacto. Definimos

$$\mathbb{A}_B^{(1)} = \big\{x \in \mathbb{A}_B^\times \,:\, |\mathrm{nrd}(x)|_{\mathbb{A}_F} = 1\big\} \ , \quad \mathbb{A}_B^1 = \big\{x \in \mathbb{A}_B^\times \,:\, \mathrm{nrd}(x) = 1\big\}$$

y, dado un subgrupo $H \subset \mathbb{A}_B^\times$, subgrupos $H^{(1)} = H \cap \mathbb{A}_B^{(1)}$ y $H^1 = H \cap \mathbb{A}_B^1$. Recordemos, también, el siguiente hecho: dados un grupo topológico G, un subgrupo abierto H y un subconjunto arbitrario $A \subset G$, el producto $A \cdot H$ y su complemento son abiertos, puediéndose escribir como uniones de aquellas coclases $x \cdot H$ que los intersecan: $A \cdot H = \bigcup_{x \in A \cdot H} x \cdot H$ y $G \smallsetminus \big(A \cdot H\big) = \bigcup_{x \notin A \cdot H} x \cdot H$. Ahora, dado que B es un álgebra indefinida, V_∞^F contiene, al menos, un lugar en donde el álgebra no ramifica. En particular, por aproximación fuerte (Teorema II.23), el producto $B^1 \cdot B_\infty^1$ es denso en $\mathbb{A}_B^1$ y, puesto que $B_\infty^1 \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1 = \mathbb{A}_B^1 \cap \big(B_{\infty,+}^\times \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times\big)$ es un subgrupo abierto de $\mathbb{A}_B^1$, el complemento $\mathbb{A}_B^1 \smallsetminus B^1 \cdot \big(B_\infty^1 \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1\big)$ es abierto y

$$\mathbb{A}_B^1 \;=\; B^1 B_\infty^1 \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1 \; .$$

En consecuencia, la aplicación $\mathbb{A}_B^1 \to \mathfrak{h}^r$ dada por $g = (g_\infty, \widehat{g}) \mapsto g_\infty \cdot \mathbf{i}$ induce una correspondencia

$$B^1 \backslash \mathbb{A}_B^1 / K_\infty \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1 \;\simeq\; \mathcal{O}_{\widehat{\alpha}}^1 \backslash \mathfrak{h}^r \; ,$$

donde $K_\infty = \mathrm{SO}(2)^r \times (\mathbb{H}^1)^{n-r}$ es el subgrupo compacto maximal en B_∞^1. Ahora, como B es de división, el cociente $B^\times \backslash \mathbb{A}_B^{(1)}$ es compacto.[1] El subgrupo $B_{\infty,+}^{(1)} \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times = \mathbb{A}_B^{(1)} \cap \big(B_{\infty,+}^\times \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times\big)$ es abierto, lo que implica que $W = \mathbb{A}_B^{(1)} \smallsetminus B^\times \cdot \big(B_{\infty,+}^{(1)} \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times\big)$ sea abierto. En particular, $B^\times \backslash W$ es abierto en el cociente y su complemento, $B^\times \backslash B^\times \cdot \big(B_{\infty,+}^{(1)} \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times\big)$ es compacto. Pero $B_{\infty,+}^{(1)} = \big(\mathrm{Z}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{A}_B^{(1)}\big) \cdot B_\infty^1$ y, a fin de cuentas,

$$\big(\mathrm{Z}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{A}_B^{(1)}\big)\, B^\times \backslash B^\times \cdot \big(B_{\infty,+}^{(1)} \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times\big) / K_\infty \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^\times \;=\; B^1 \backslash B^1 \cdot \big(B_\infty^1 \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1\big) / K_\infty \widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{\alpha}}^1$$

es compacto.

Cuando B/F es un álgebra definida, $r = 0$, no tenemos una acción sobre $\mathfrak{h}$ y el cociente adélico $B^\times \backslash B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times / B_\infty^\times \widehat{\mathcal{O}}^\times = B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$ es simplemente un conjunto finito de puntos en correspondencia con el conjunto $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$ de clases de ideales cuyo orden a derecha es $\mathcal{O}$ (Teorema II.29).

IV.2. Un $B^\times$-módulo

Las formas modulares cuaterniónicas que vamos a definir están dadas como funciones en $\mathbb{A}_B^\times$. Para poder tratarlas de manera homogénea, lo primero será definir el espacio de llegada de dichas funciones.

Dado un entero $w \in \mathbb{Z}$, consideramos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado w en variables X, Y, con una acción a derecha de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada

[1] [48, Ch. III, § 1]

por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \cdot \gamma &:= (\gamma^{\iota})^{t} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} dX - cY \\ -bX + aY \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{IV.2.1}$$

En la expresión anterior, γ es la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con coeficientes complejos, ^{t} denota transposición e $^{\iota}$ denota la adjunta. Fijando un segundo entero $m \in \mathbb{Z}$, consideramos una acción modificada a partir de la anterior: si p es un polinomio homogéneo de grado w y $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, definimos

$$p(X, Y) \cdot \gamma = \det(\gamma)^m \, p(dX - cY, -bX + aY) . \tag{IV.2.2}$$

Denotaremos el espacio de polinomios homogéneos de grado w con esta acción de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ por $P_w(m)(\mathbb{C})$.

Sea $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ un peso (ver § III.2) y sean

$$k_0 = \max_i k_i , \quad m_i = \frac{k_0 - k_i}{2} \quad \text{y} \quad w_i = k_i - 2 .$$

Si $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})^r \times \mathbb{H}^{n-r}$, se considera el $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^{n-r}$-módulo

$$W_{\underline{k}}(\mathbb{C}) := P_{w_{r+1}}(m_{r+1})(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes P_{w_n}(m_n)(\mathbb{C}) . \tag{IV.2.3}$$

Si $r = n$, se define $W_{\underline{k}}(\mathbb{C}) := \mathbb{C}$. También se cumple $W_{\underline{k}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, si $\underline{k} = (2, \ldots, 2)$.

Sean $v_1, \ldots, v_n$ los lugares arquimedianos de F. Para cada v_j podemos escoger una inclusión $B_{v_j} \hookrightarrow \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de manera que la imagen de un elemento $t \in \mathrm{Z}(B_{v_j}^{\times}) = \mathbb{R}^{\times}$ sea la matriz escalar $\begin{bmatrix} t & \\ & t \end{bmatrix}$ y la denotamos $\gamma \mapsto \gamma_j$. El morfismo $B^{\times} \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^{n-r}$ dado por

$$\gamma \mapsto (\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)$$

determina una estructura de $B^{\times}$-módulo en $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$. Si $r = n$, por ejemplo si $B \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(F)$, $W_{\underline{k}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ con la acción trivial de $B^{\times}$.

IV.3. Formas modulares cuaterniónicas

En lo que resta de esta sección, asumimos, salvo que se indique lo contrario, que B/F es un álgebra de cuaterniones *de división* sobre el cuerpo de números totalmente real F de grado n, que $r \geq 0$ indica la cantidad de lugares arquimedianos no ramificados y que los lugares arquimedianos $v_1, \ldots, v_n$ están ordenados de forma tal que v_i sea no ramificado, si y sólo si $i \leq r$. Fijamos un peso $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ y escribimos $W_{\underline{k}}$ en lugar de $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$. Fijamos también inclusiones $(\gamma \mapsto \gamma_j) : B_{v_j}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ para $j \geq r+1$, de manera que quede inducida una acción de $B^\times$ en el $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^{n-r}$-módulo $W_{\underline{k}}$, que denotamos $x \cdot \gamma = x^\gamma$, si $\gamma \in B^\times$ y $x \in W_{\underline{k}}$.

IV.3.1. Caso indefinido

Supongamos que B es un álgebra indefinida (en este caso, $r \geq 1$) y sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler. En analogía con las formas modulares elípticas y teniendo en cuenta la definición (IV.1.7) de la variedad de Shimura asociada a B y al orden $\mathcal{O}$, las formas modulares que definiremos a continuación son funciones de la forma $f : (\mathfrak{h}^\pm)^r \times (\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \to W$ que verifican condiciones de regularidad e invarianza con respecto a una acción del grupo $B^\times$.

Para $i \in [\![1, r]\!]$, introducimos un *factor de automorfía*,

$$J_i : B_{v_i}^\times \times \mathfrak{h}^\pm \to \mathbb{C} ,$$

por la expresión

$$J_i(\gamma, z) = \frac{j(\gamma, z)^{k_i}}{\det(\gamma)^{m_i+k_i-1}} , \tag{IV.3.1}$$

donde $j\big(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right], z\big) = cz + d$. Dado que $j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma' z) \cdot j(\gamma', z)$ para $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ y $z \in \mathfrak{h}^\pm$, las funciones J_i cumple con la propiedad análoga

$$J_i(\gamma\gamma', z) = J_i(\gamma, \gamma' z) \cdot J_i(\gamma', z) . \tag{IV.3.2}$$

Definimos un *operador de peso* $\underline{k}$ de la siguiente manera: dados un elemento $\gamma \in B^\times$ y una función $f : (\mathfrak{h}^\pm)^r \times (\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \to W_{\underline{k}}$, sea $f\big|_{\underline{k}}\gamma$ la función

$$\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \left(\prod_{i=1}^r J_i(\gamma_i, z_i)^{-1}\right) f(\gamma z, \gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)^\gamma . \tag{IV.3.3}$$

Definición IV.3. Dada un álgebra de cuaterniones indefinida B de división, sobre un cuerpo de números totalmente real F y dado un orden de Eichler $\mathcal{O} \subset B$ de nivel $\mathfrak{N}$, una *forma modular cuaterniónica* de peso $\underline{k}$ y nivel $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ (o, también, de nivel $\mathfrak{N}$) para B es una función

$$f : (\mathfrak{h}^\pm)^r \times (\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$$

holomorfa en la primera variable y localmente constante en la segunda tal que $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para toda $\gamma \in B^\times$. Estas funciones constituyen un $\mathbb{C}$-espacio vectorial que denotamos $\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$.

La descomoposición (IV.1.7) de $X_0^B(\mathfrak{N})$ se ve reflejada en una descomposición análoga del espacio $\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$. En primer lugar, si $\mathfrak{a}$ es un representante de las clases estrictas de F y $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ es el grupo de unidades asociado según (IV.1.6), entonces podemos definir una acción de $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ en funciones $f : \mathfrak{h}^r \to W_{\underline{k}}$ de la siguiente manera: si $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, sea $f\big|_{\underline{k}}\gamma$ la función dada por

$$\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(\gamma_i, z_i)^{-1}\right) f(\gamma z)^{\gamma} \;.$$

Luego definimos los espacios de funciones holomorfas invariantes por esta acción de $\Gamma_{\mathfrak{a}}$:

$$\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) \;=\; \left\{ f : \mathfrak{h}^r \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C}) \,:\, f \text{ es holomorfa y } f\big|_{\underline{k}}\gamma = f \,\forall \gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}} \right\} .$$

Entonces la aplicación $f \mapsto (f_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}}$, donde $f_{\mathfrak{a}}(z) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})$, determina una transformación lineal

$$\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}) \;\to\; \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) \;\; , \tag{IV.3.4}$$

pues, si $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$,

$$\begin{aligned}\big(f_{\mathfrak{a}}\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z) \;&=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(\gamma_i, z_i)^{-1}\right) f(\gamma z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})^{\gamma} \;=\; \big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z, \gamma^{-1}\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \\ &=\; f(z, \gamma^{-1}\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;=\; f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;=\; f_{\mathfrak{a}}(z) \;.\end{aligned}$$

Esta transformación es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. El argumento es análogo al de la demostración de la Proposición III.15, con la salvedad de que, en este caso, hay que tener en cuenta la acción de $B^{\times}$ en $W_{\underline{k}}$. El isomorfismo (IV.3.4) depende de la elección de los representantes $\mathfrak{a}$ de las clases estrictas de F, de los idèles $\widehat{a} \in \widehat{\mathfrak{o}_F}$ que cumplen (IV.1.5) y de los elementos $\widehat{\alpha}$ tales que $\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$.

IV.3.2. Caso definido

Si B es un álgebra definida, no hay acción sobre el semiplano complejo.

Definición IV.4. Sea B un álgebra de cuaterniones definida, sobre un cuerpo de números totalmente real F y sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler de nivel $\mathfrak{N}$. Una *forma modular cuaterniónica* de peso $\underline{k}$ y nivel $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ (o, también, de nivel $\mathfrak{N}$) para B es una función

$$f \,:\, \widehat{B}^{\times}/\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \;\to\; W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$$

que satisface, para toda $\gamma \in B^{\times}$,

$$\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;:=\; f(\gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})^{\gamma} \;=\; f(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;. \tag{IV.3.5}$$

El espacio de formas modulares correspondientes lo denotamos $\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$.

El grupo de unidades $B^\times$ actúa en el conjunto de ideales I de B con $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}$ por multiplicación a izquierda. Una forma modular f para B es entonces una función equivariante respecto de esta acción. Si $I = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times \cap B$, el estabilizador de I es el grupo de unidades de su orden a izquierda:

$$\Gamma_{\widehat{\alpha}} \;=\; (\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\alpha}^{-1}) \,\cap\, B^\times \;=\; \left\{b \in B^\times \;:\; bI = I\right\} \;.$$

De esta manera, tomando un sistema de representantes de las clases en $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$, se obtiene un isomorfismo

$$\mathcal{M}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \;\xrightarrow{\sim}\; \bigoplus_{[I]\in \mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})} W_{\underline{k}}(\mathbb{C})^{\Gamma_{\widehat{\alpha}}} \tag{IV.3.6}$$

dado por $f \mapsto (f(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times))_{[I]\in\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})}$.

IV.4. Funciones en los adèles

A continuación mostramos que las formas modulares cuaterniónicas, como las formas modulares de Hilbert, tienen una contraparte adélica. El rol que ocupaba el grupo $\mathrm{GL}_{2/F}$ es en este caso ocupado por el grupo de unidades de un álgebra de cuaterniones de división.

IV.4.1. Caso indefinido

Supongamos que B es un álgebra indefinida y sea $f:\, (\mathfrak{h}^\pm)^r \times (\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \to W_{\underline{k}}$ tal que $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para toda $\gamma \in B^\times$. Definimos una función $\phi_f:\, B^\times_\infty \times \widehat{B}^\times \to W_{\underline{k}}$ por

$$\phi_f(g,\widehat{\alpha}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(g_i,\sqrt{-1})^{-1}\right) f(g\cdot \mathbf{i}, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)^g \;. \tag{IV.4.1}$$

Dada $\phi:\, B^\times_\infty \times \widehat{B}^\times \to W_{\underline{k}}$ y un elemento $(h,\widehat{\beta}) \in B^\times_\infty \times \widehat{B}^\times$, definimos

$$\big(\phi\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta})\big)(g,\widehat{\alpha}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(h_i,\sqrt{-1})^{-1}\right) \phi(gh^{-1},\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1})^h \;. \tag{IV.4.2}$$

Entonces, la función ϕ_f satisface

I $\phi_f\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta}) = \phi_f$ para toda $h \in C^B_{\mathbf{i}}$ y $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$ y

II $\phi_f(\gamma g, \gamma\widehat{\alpha}) = \phi_f(g,\widehat{\alpha})$ para toda $\gamma \in B^\times$.

En cuanto a I, por (IV.4.1) y (IV.4.2),

$$\begin{aligned}\big(\phi_f\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta})\big)(g,\widehat{\alpha}) \;&=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(h_i,\sqrt{-1})^{-1}\right)\phi_f(gh^{-1},\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1})^h \\ &=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(h_i,\sqrt{-1})^{-1}J_i(g_ih_i^{-1},\sqrt{-1})^{-1}\right) f(gh^{-1}\cdot\mathbf{i},\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})^{(gh^{-1})\,h}\;.\end{aligned}$$

Si $h \in C^B_{\mathbf{i}}$ y $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$, esto es igual a $\phi_f(g,\widehat{\alpha})$ de lo que se deduce I. En cuanto a II,

$$\phi_f(\gamma g,\gamma\widehat{\alpha}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(g_i,\sqrt{-1})^{-1}\right)\left\{\left(\prod_{i=1}^{r} J_i(\gamma_i,z_i)^{-1}\right) f(\gamma z,\gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})^{\gamma}\right\}^g\;,$$

donde $z = g\cdot\mathbf{i}$. Si $\gamma \in B^{\times}$, por (IV.3.3) y $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$, esta expresión es igual a $\phi_f(g,\widehat{\alpha})$.

Recíprocamente, si $\phi : B^{\times}_{\infty}\times\widehat{B}^{\times} \to W_{\underline{k}}$ es una función que cumple con I y II, entonces la expresión

$$f_{\phi}(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{r} J_i(g_i,\sqrt{-1})\right)\phi(g,\widehat{\alpha})^{g^{-1}}$$

define una función $f_{\phi} : (\mathfrak{h}^{\pm})^r \times (\widehat{B}^{\times}/\widehat{\mathcal{O}}^{\times}) \to W_{\underline{k}}$ (por I, f_{ϕ} está bien definida) que verifica $f_{\phi}\big|_{\underline{k}}\gamma = f_{\phi}$ para $\gamma \in B^{\times}$ (por II).

IV.4.2. Caso definido

Si B es un álgebra definida, al no haber acción en el semiplano, la construcción anterior se simplifica. Sea $f : \widehat{B}^{\times}/\widehat{\mathcal{O}}^{\times} \to W_{\underline{k}}$ una función tal que $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para $\gamma \in B^{\times}$ (la acción está dada por la expresión (IV.3.5)) y sea $\phi_f : B^{\times}_{\infty}\times\widehat{B}^{\times} \to W_{\underline{k}}$ la función dada por

$$\phi_f(g,\widehat{\alpha}) \;=\; f(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^{\times})^g\;. \tag{IV.4.3}$$

Como en el caso indefinido introducimos un operador de peso $\underline{k}$. Dada una función $\phi : B^{\times}_{\infty}\times\widehat{B}^{\times} \to W_{\underline{k}}$ y $(h,\widehat{\beta}) \in B^{\times}_{\infty}\times\widehat{B}^{\times}$, sea $\phi\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta})$ la función dada por

$$\big(\phi\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta})\big)(g,\widehat{\alpha}) \;=\; \phi(gh^{-1},\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1})^h\;. \tag{IV.4.4}$$

Con estas definiciones, si $f\big|_{\underline{k}}\gamma = f$ para $\gamma \in B^{\times}$, vale también que

I $\phi_f\big|_{\underline{k}}(h,\widehat{\beta}) = \phi_f$ para toda $h \in B^{\times}_{\infty}$ y $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ y

II $\phi_f(\gamma g,\gamma\widehat{\alpha}) = \phi_f(g,\widehat{\alpha})$ para toda $\gamma \in B^{\times}$.

Equivalentemente, ϕ_f satisface

$$\phi_f(gh,\widehat{\alpha}) = \phi_f(g,\widehat{\alpha})^h \quad , \quad \phi_f(g,\widehat{\alpha}\widehat{\beta}) = \phi_f(g,\widehat{\alpha}) \quad \text{y} \quad \phi_f(\gamma g,\gamma\widehat{\alpha}) = \phi_f(g,\widehat{\alpha})$$

para $h \in B_\infty^\times$, $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$ y $\gamma \in B^\times$. Recíprocamente, si $\phi : B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times \to W_{\underline{k}}$ satisface estas condiciones, entonces la expresión

$$f_\phi(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \phi(g,\widehat{\alpha})^{g^{-1}}$$

define una función $f_\phi : \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \to W_{\underline{k}}$ que cumple que $f_\phi\big|_{\underline{k}}\gamma = f_\phi$ para $\gamma \in B^\times$. En particular, para cada $\widehat{\alpha} \in \widehat{B}^\times$ y cada $\gamma \in \Gamma_{\widehat{\alpha}} = (\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\alpha}^{-1}) \cap B^\times$,

$$\phi(1,\widehat{\alpha})^\gamma = \phi(\gamma,\gamma\widehat{\alpha}) = \phi(1,\widehat{\alpha}) \ .$$

IV.4.3. Formas automorfas

Sea, ahora, B/F un álgebra de cuaterniones de división, definida o indefinida. Sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler. A cada lugar arquimediano $v \in V_\infty^F$ le asociamos un grupo compacto K_v de la siguiente manera:

$$K_v = \begin{cases} \mathrm{SO}(2) & \text{si } v \text{ es no ramificado} \\ \mathbb{H}^1 & \text{si } v \text{ es ramificado} \end{cases} \ .$$

Sea $K_\infty = \prod_{v\in V_\infty^F} K_v$ el producto de estos grupos. Entonces K_∞ es un subgrupo compacto y conexo de la parte arquimediana $B_\infty^\times$ de $\mathbb{A}_B^\times$ (si B es indefinida, es el subgrupo compacto conexo maximal del estabilizador $C_{\mathbf{i}}^B = \mathrm{Z}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty$).

Definición IV.5 ([23])**.** Una función $\phi : \mathbb{A}_B^\times = B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times \to \mathbb{C}$ es una *forma automorfa de nivel* $\widehat{\mathcal{O}}^\times$, si es C^∞ en la primera variable y localmente constante en la segunda y:

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ para todo $\gamma \in B^\times$,

(ii) $\phi(g\widehat{\beta}) = \phi(g)$ si $\widehat{\beta} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$,

(iii) ϕ es K_∞-finita y Z-finita, es decir, el espacio generado por las funciones $g \mapsto \phi(\eta g h)$ con $h \in K_\infty$ y $\eta \in \mathrm{Z}(\mathbb{A}_F)$, es de dimensión finita,

(iv) si $\Delta_i \in U(Lie(B_{v_i}^\times))$ es el elemento de Casimir en (la complexificación de) el álgebra envolvente del álgebra de Lie de $B_{v_i}^\times \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ para cada lugar v_i que no ramifica ($i = 1, \ldots, r$), entonces la órbita de ϕ por la acción de estos operadores está contenida en un subespacio de dimensión finita de $C(\mathbb{A}_B^\times)$.

Más generalmente, dado un espacio vectorial complejo W, una función $\phi : \mathbb{A}_B^\times \to W$ se dice forma automorfa de nivel $\widehat{\mathcal{O}}^\times$, si para toda funcional lineal $\lambda : W \to \mathbb{C}$, $\lambda \circ \phi$ es una forma de ese tipo.

Proposición IV.6 ([23]). *La aplicación $f \mapsto \phi_f$ determina una correspondencia entre formas modulares de peso $\underline{k}$ y nivel $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y formas automorfas $\phi : \mathbb{A}_B^\times \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ que satisfacen I y II y, para cada lugar arquimediano no ramificado v_i,*

$$d\rho X_i^- \phi \,=\, 0 \ ,$$

donde $\rho : B_\infty^\times \to \mathrm{Aut}(C^\infty(B_\infty^\times))$ es la representación regular a derecha y X_i^- es el elemento de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) \simeq Lie(B_{v_i}^\times) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dado por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$.

IV.5. La correspondencia de Jacquet-Langlands

La interpretación automorfa de las formas modulares cuaterniónicas permite definir de manera uniforme los operadores de Hecke para un álgebra definida o indefinida, tal como se hace para el álgebra de matrices. Dados, pues, un álgebra de cuaterniones B/F, un orden de Eichler $\mathcal{O}$ en B y un idèle $\widehat{\pi} \in \widehat{B}^\times$, el subgrupo abierto $\widehat{\mathcal{O}}^\times$ actúa a izquierda sobre el compacto $\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times \subset \widehat{B}^\times$, de lo que se deduce que existe una descomposición

$$\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \widehat{\mathcal{O}}^\times \,=\, \bigsqcup_i \widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_i \tag{IV.5.1}$$

y el sistema de representantes $\{\widehat{\pi}_i\}_i$ es un conjunto finito. Sea $\mathfrak{N}$ el nivel del orden $\mathcal{O}$. Si B es un álgebra indefinida y $f \in \mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$, la expresión

$$\big(T_{\widehat{\pi}} f\big)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \,=\, \sum_i f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \tag{IV.5.2}$$

define un nuevo elemento de $\mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$; si B es un álgebra definida, la expresión análoga, sin el argumento arquimediano 'z', también define una forma modular del mismo peso y del mismo nivel que f. En todo caso, queda determinado, de esta manera, un operador $T_{\widehat{\pi}} : \mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}) \to \mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ asociado al idèle $\widehat{\pi}$.

Sea $\mathfrak{D}$ el discriminante de B y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo tal que $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}\mathfrak{N}$. Sea p un uniformizador de $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}$, un generador de su ideal maximal, y sea $\pi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ el elemento dado por la matriz

$$\pi \,=\, \begin{bmatrix} p & \\ & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Sea $\widehat{\pi} \in \widehat{B}^{\times}$ el idèle dado por $\widehat{\pi}_v = 1$, si $v \neq \mathfrak{p}$ y tal que $\widehat{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi$. Llamamos *operador de Hecke en* $\mathfrak{p}$ al operador $T_{\mathfrak{p}} := T_{\widehat{\pi}}$, determinado por una descomposición de $\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$. Definimos, también,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{p}) \;=\; \left\{\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{O}} \,:\, \mathrm{nrd}(\widehat{x}) \in \widehat{\mathfrak{p}\mathfrak{o}_F}^{\times}\right\} \quad \text{y} \quad \Theta(\mathfrak{p}) \;=\; \widehat{\mathcal{O}}^{\times}\backslash\mathfrak{I}(\mathfrak{p})\;.$$

Entonces $\mathfrak{I}(\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{x}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$ para todo $\widehat{x}$ perteneciente a este conjunto, pues $(\mathfrak{p}, \mathfrak{D}\mathfrak{N}) = 1$, y, en particular, $\mathfrak{I}(\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\widehat{\mathcal{O}}^{\times}$. Además, la sumatoria en la definición de $T_{\mathfrak{p}}$ se realiza sobre un sistema de representantes de $\Theta(\mathfrak{p})$, tanto en el caso indefinido, como en el definido. Dado que para ideales primos distintos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ los operadores correspondientes $T_{\mathfrak{p}}$ y $T_{\mathfrak{q}}$ actúan en distintas coordenadas, se deduce que conmutan. El *álgebra de Hecke* actuando en $\mathcal{M}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es el álgebra de endomorfismos generada por el conjunto $\big\{T_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}\mathfrak{N}\big\}$. Denotamos por $\mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ el espacio de formas cuaterniónicas *cuspidales* de peso $\underline{k}$ y nivel $\mathfrak{N}$ para B. En la siguiente sección se explicará lo que se quiere decir por "cuspidal"; a los fines de enunciar el siguiente teorema, es suficiente saber que $\mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ es un subespacio de $\mathcal{M}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$, con la estructura de módulo de Hecke dada por restringir los operadores $T_{\mathfrak{p}}$.

Sea $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{o}_F$ un ideal íntegro y supongamos que $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}\mathfrak{N}'$ con $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{N}'$ íntegros y $\mathfrak{D}$ libre de cuadrados. Por el Teorema de clasificación II.20, existe al menos un álgebra de cuaterniones B/F de discriminante $\mathfrak{D}$. Supongamos, además, que $(\mathfrak{D}, \mathfrak{N}') = 1$.

Teorema IV.7 (Jacquet-Langlands)**.** *Existe un morfismo inyectivo* $\mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}') \hookrightarrow \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{D}\mathfrak{N}')$ *que preserva la acción de Hecke y cuya imagen es el subespacio* $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{D}\mathfrak{N}')^{\mathfrak{D}-\mathrm{new}}$ *de formas nuevas en todo ideal primo divisor de* $\mathfrak{D}$*.*

El Teorema IV.7 nos da un procedimiento para recuperar $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ a través de formas modulares cuaterniónicas. Supongamos que $\mathfrak{l}$ es un ideal primo que divide a $\mathfrak{N}$ pero que al cuadrado no lo divide. Por el Teorema de clasificación global para álgebras de cuaterniones II.20, sabemos que existe un álgebra de cuaterniones B/F tal que $\mathrm{Ram}(B) \cap V^F_f = \{\mathfrak{l}\}$, es decir, $\mathfrak{l}$ es el único lugar finito de F en donde B ramifica. Si elegimos B de esta manera,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \;&=\; \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{new}} \,\oplus\, \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})^{\mathfrak{l}-\mathrm{old}} \\ &=\; \mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}') \,\oplus\, \iota_1\big(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}')\big) \,\oplus\, \iota_{\mathfrak{l}}\big(\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}')\big)\;.\end{aligned}$$

El problema de la descripción de $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ se reduce entonces a poder determinar un subespacio en correspondencia con un espacio de formas cuaterniónicas y un subespacio de formas de Hilbert de nivel "más bajo".

Aun asumiendo que podemos *calcular* sin problemas los espacios de formas cuspidales cuaterniónicas $\mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}')$ para un nivel arbitrario $\mathfrak{N}'$, este procedimiento presenta un inconveniente. Supongamos primero, para simplificar, que $\mathfrak{N} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$, con $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ ideales primos distintos. Entonces la descomposición de $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq})$ se puede hacer, en principio, de varias maneras. Podemos elegir un álgebra B con $\mathrm{Ram}(B)\cap V_f^F = \{\mathfrak{p}\}$ para obtener

$$\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq}) \;=\; \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{q}) \,\oplus\, \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq})^{\mathfrak{p}-\mathrm{old}} \;;$$

si $n=[F:\mathbb{Q}]=1$ o 2, hay una única álgebra de tales características, pero si $n>2$ hay más de una elección posible. Podemos, también, intercambiar los roles de $\mathfrak{p}$ y de $\mathfrak{q}$. O bien podemos elegir B de manera que $\mathrm{Ram}(B)\cap V_f^F = \{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}$ –de nuevo, hay más de una manera de hacer esta elección, si $n\geq 2$– y obtener así

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq}) \;&=\; \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(1) \,\oplus\, \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq})^{\mathfrak{pq}-\mathrm{old}}\\ &=\; \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(1) \,\oplus\, \mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{pq})^{\mathrm{old}} \;.\end{aligned}$$

Pero, si el nivel $\mathfrak{N}$ no es libre de cuadrados, no tenemos tantas elecciones. Por ejemplo, si $\mathfrak{N}=\mathfrak{p}^2$, el discriminante de B debe ser $\mathfrak{D}=1$, es decir, sólo podemos permitir ramificación en infinito. Si $n=1$ esto es imposible y si $n=2$ hay una única elección posible. En general, los métodos que describiremos en el Capítulo V se basan en poder elegir B de manera que r, la cantidad de lugares arquimedianos en donde B no ramifica, sea, o bien 0, o bien 1. En ese caso, si $\mathfrak{N}=\mathfrak{p}^2$, hay una única forma de realizar esa elección.

En el capítulo siguiente, describimos en detalle los módulos de Hecke $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$, manteniendo, como hasta ahora, la distinción entre las álgebras definidas e indefinidas. La descripción en el caso indefinido es muy similar a la del módulo de formas de Hilbert cuspidales. Vía los isomorfismos de Eichler-Shimura, los espacios de formas cuaternónicas para un álgebra indefinida B se realizan en la cohomología de la variedad de Shimura $X_0^B(\mathfrak{N})$. Esta reinterpretación da lugar, en el caso particular en que B ramifica en todos excepto un único lugar arquimediano, a un método para calcular formas de Hilbert cuspidales. Por otra parte, la descripción cuando B es totalmente definida es lo suficientemente explícita como para ser implementada y obtener, así, un segundo método.

Capítulo V

Métodos para el cálculo de formas de Hilbert

Como ya mencionamos, el Teorema IV.7 proporciona una manera de reconstruir los espacios $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ de formas de Hilbert cuspidales. El problema de describir la estructura de Hecke de $\mathcal{S}_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ se reduce a poder calcular $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}')$ para un álgebra de cuaterniones B y un nivel dado $\mathfrak{N}'$, en un principio, arbitrarios. Por *calcular* se entiende, dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}_F$, coprimo con $\mathfrak{N}'$, describir la acción de un operador $T_\mathfrak{p}$ en términos de una base independiente de $\mathfrak{p}$. Según lo desarrollado en la Sección § III.7, esto equivale a determinar los posibles sistemas de autovalores $\{a_\mathfrak{p}\}_\mathfrak{p}$ asociados a la familia de operadores $T_\mathfrak{p}$. El objetivo de este capítulo es describir dos métodos para llevar a cabo este procedimiento. Estos métodos se dividen en el *método indefinido* y el *método definido*, de acuerdo con el álgebra B.

V.1. Método indefinido

Sea B/F un álgebra indefinida, distinta de matrices, y sea $\mathcal{O}$ un orden de Eichler de nivel $\mathfrak{N}$ en B. Empecemos describiendo el módulo de Hecke $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. La variedad de Shimura $X^B_0(\mathfrak{N})$ es compacta[1] y no tiene cúspides. Tiene sentido decir, entonces, que toda forma modular para B es cuspidal, es decir, definimos $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) := \mathcal{M}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$. Asumimos dado un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ del grupo de clases estrictas de F; para cada representante $\mathfrak{a}$, elegimos $\widehat{a} \in \widehat{F}^\times$ tal que $\mathfrak{a} = \widehat{a}\widehat{\mathfrak{o}_F} \cap F$ y $\widehat{\alpha} \in \widehat{B}^\times$ tal que $\mathrm{nrd}(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{a} = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}^{-1} , \quad \mathcal{O}_\mathfrak{a} = \widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{a} \cap B \quad \text{y} \quad \Gamma_\mathfrak{a} = \mathcal{O}^\times_{\mathfrak{a},+} = \mathcal{O}^\times_\mathfrak{a} \cap B^\times_+ .$$

El espacio $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ se descompone como suma directa de $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ vía el isomorfismo (IV.3.4), dado por $f \mapsto (f_\mathfrak{a})_\mathfrak{a}$ donde $f_\mathfrak{a}(z) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$. Los operadores de Hecke actúan permutando estos subespacios. Sea $\mathfrak{b}$ el representante de las clases estrictas que verifica

[1] ver § IV.1

$[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}]$. Entonces, para cada representante $\widehat{\pi}$ de las órbitas en $\Theta(\mathfrak{p})$, el retículo $\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\beta}^{-1} \cap B$ es un ideal de B cuyo orden a derecha es $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ y su norma reducida es un ideal en la clase (estricta) principal. En consecuencia, existe $\varpi \in B_+^\times$ tal que $\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\beta}^{-1} \cap B = \varpi^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ y una unidad $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$ tal que $\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{u}\widehat{\beta}^{-1} = \varpi^{-1}$. Si ahora miramos las componentes de la forma $T_{\mathfrak{p}}f$ se deduce que, usando la invarianza de f,

$$(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{\widehat{\pi}\in\Theta(\mathfrak{p})} f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\varpi} f(z, \varpi^{-1}\widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\varpi} \left(f_{\mathfrak{b}}\big|_{\underline{k}}\varpi\right)(z) \ .$$

Si bien esto muestra que la descripción de $T_{\mathfrak{p}}$ en términos de la descomposición de $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ es sencilla, la utilidad de la igualdad $\left(T_{\mathfrak{p}}f\right)_{\mathfrak{a}} = \sum_{\varpi} f_{\mathfrak{b}}\big|_{\underline{k}}\varpi$ depende de poder hallar todos aquellos elementos ϖ cuya existencia está garantizada por aproximación fuerte. Estos elementos se pueden caracterizar globalmente. La sumatoria se realiza sobre un sistema de representantes de

$$\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \Gamma_{\mathfrak{b}} \backslash \left\{ \varpi \in I_{\mathfrak{b}}I_{\mathfrak{a}}^{-1} \cap B_+^\times \ : \ \mathrm{nrd}(\varpi)\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{b} \right\} ,$$

donde $I_{\mathfrak{a}} = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$ e $I_{\mathfrak{b}} = \widehat{\beta}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$. El argumento es similar al dado en la Observación III.25. El resultado III.26 también es válido en este caso, es decir, siendo B un álgebra de división indefinida.[2]

Observación V.1. Los operadores de Hecke actúan por bloques en $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$, permutando en cierto sentido los sumandos $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$: dados $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}\mathfrak{N}$ primo y $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ tales que $[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}]$, definimos $\left(T_{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \to \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$ por

$$\left(T_{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{b}} = \sum_{\varpi\in\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} f_{\mathfrak{b}}\big|_{\underline{k}}\varpi \ .$$

Entonces el operador $T_{\mathfrak{p}}$ actúa como la matriz de operadores $\left[\left(T_{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ recorren los representantes de las clases estrictas de F y $(T_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ es el operador recién definido, si $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}\mathfrak{p}]$, y es igual a 0, en caso contrario.

El método indefinido se basa en poder resolver el siguiente problema de manera explícita.

Problema V.2. *Dado un cuerpo de números totalmente real F de grado $n = [F : \mathbb{Q}]$, un álgebra de cuaterniones indefinida B/F, un ideal $\mathfrak{N}$ de F coprimo con el discriminante $\mathfrak{D}$ de B y un peso $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$, calcular los posibles sistemas de autovalores de los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}}$ actuando en $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ para $(\mathfrak{p}, \mathfrak{D}\mathfrak{N}) = 1$.*

[2][44, Propo. 2.3]

En el caso en que el álgebra B/F ramifica en $n-1$ lugares arquimedianos y el peso verifica $\underline{k} \in (2\mathbb{Z}_{\geq 1})^n$, este problema admite una solución mediante el cálculo en la cohomología de curvas de Shimura.[3] En particular, si el grado de la extensión, n, es impar, eligiendo B de discriminante $\mathfrak{D} = 1$, es decir, B ramifica exactamente en $n-1$ lugares arquimedianos (y en ningún lugar finito), por la correspondencia de Jacquet-Langlands, se obtiene un algoritmo que permite calcular los sistemas de autovalores en el espacio de formas de Hilbert cuspidales de nivel $\mathfrak{N}$ de los operadores de Hecke coprimos con el nivel.

Sean F, B, $\mathfrak{N}$ y $\underline{k}$ como en el enunciado del problema y sean $v_1, \ldots, v_n$ los lugares arquimedianos de F. Supongamos que B ramifica en v_i para $i \geq 2$. En tal caso, $B_\infty \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^{n-1}$. Supongamos, también, que contamos con un orden de Eichler $\mathcal{O}$ en B de nivel $\mathfrak{N}$, coprimo con $\mathfrak{D}$. Existe una descomposición de la variedad de Shimura asociada a B y a $\mathcal{O}$ dada por

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\mathfrak{a}} \Gamma_{\mathfrak{a}} \backslash \mathfrak{h} \ ,$$

donde cada componente $X_0^B(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})(\mathbb{C}) = \Gamma_{\mathfrak{a}} \backslash \mathfrak{h}$ es una *curva* conexa y compacta. En lo que resta de esta sección, reservamos la notación $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ para la imagen de $\mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times$ en $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$. Fijamos una inmersión $\iota_1 : B^\times \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, asociada al lugar arquimediano en donde B es no ramificada, y denotamos por ι_∞ la imagen de ι_1 en el cociente. Entonces

$$\Gamma_{\mathfrak{a}} := \iota_\infty\big(\mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times\big) \subset \mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R}) \ .$$

Si $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$, las componentes $f_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{h} \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ están dadas por $f_{\mathfrak{a}}(z) = f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ y verifican

$$\big(f_{\mathfrak{a}}\big|_{\underline{k}}\gamma\big)(z) := \frac{\det(\gamma_1)^{m_1+k_1-1}}{j(\gamma_1, z_1)^{k_1}} f_{\mathfrak{a}}(\gamma_1 z)^\gamma = f_{\mathfrak{a}}(z) \tag{V.1.1}$$

para toda $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times$. Si $\underline{k} \in (2\mathbb{Z})^n$ es par, entonces la expresión anterior tiene sentido tomando $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$ e identificando $\Gamma_{\mathfrak{a}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{a},+}^\times / \mathfrak{o}_F^\times$.

Los espacios de formas cuaterniónicas $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ se realizan en la cohomología de las curvas $\Gamma_{\mathfrak{a}} \backslash \mathfrak{h}$ a través de los isomorfismos de Eichler-Shimura [32, Propo. 4.4]. Esto permite estudiar la estructura del módulo de Hecke de formas modulares cuaterniónicas, utilizando algoritmos específicos para el cálculo en cohomología. Es necesario, entonces, entender cómo se traslada la acción de los operadores de Hecke a una acción en cohomología.

V.1.1. Cohomología de grupos

Sea K un anillo conmutativo con 1 y sea Γ un grupo. Empezamos repasando la definición de los grupos de cohomología de Γ con coeficientes en un $K[\Gamma]$-módulo. Dado

[3] [21] y [49]

un $K[\Gamma]$-módulo a derecha M y dado $i \geq 1$, denotamos por $C^i(\Gamma, M)$ el K-módulo de funciones $\Gamma \times \cdots \times \Gamma \to M$ definidas en el producto de i copias de Γ que toman valores en M. Si $i = 0$, $C^0(\Gamma, M) = M$. Para cada $i \geq 1$, sea $\partial : C^i(\Gamma, M) \to C^{i+1}(\Gamma, M)$ el morfismo dado por

$$\begin{aligned}\big(\partial u\big)(\gamma_1, \ldots, \gamma_i) \;=\; u(\gamma_2, \ldots, \gamma_i) \;+\; \sum_{j=1}^{i} (-1)^j\, u(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_j\gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_{i+1}) \\ +\; (-1)^{i+1}\, u(\gamma_1, \ldots, \gamma_i) \cdot \gamma_{i+1}\end{aligned}$$

en $u \in C^i(\Gamma, M)$. Si $i = 0$, se define, para $x \in M$,

$$\big(\partial x\big)(\gamma) \;=\; x \cdot (1 - \gamma) \;.$$

La composición $\partial \circ \partial$ es cero y los K-módulos $C^i(\Gamma, M)$, junto con los morfismos ∂, definen un complejo de cocadenas. Para cada $i \geq 0$, denotamos los submódulos de $C^i(\Gamma, M)$ conformados por los cociclos y conformados por los cobordes por

$$Z^i(\Gamma, M) \;=\; \ker(\partial) \quad \text{y} \quad B^i(\Gamma, M) \;=\; \operatorname{img}(\partial) \;,$$

respectivamente, y definimos el *i-ésimo grupo de cohomología de Γ con coeficientes en M* como

$$H^i(\Gamma, M) \;=\; Z^i(\Gamma, M)/B^i(\Gamma, M) \;.$$

Observación V.3. Si $M^\Gamma = \big\{x \in M \;:\; x \cdot \gamma = x, \forall \gamma \in \Gamma\big\}$ denota el submódulo maximal en donde Γ actúa de manera trivial,

$$H^0(\Gamma, M) \;=\; Z^0(\Gamma, M) \;=\; M^\Gamma \;.$$

De las definiciones de cociclos y cobordes,

$$\begin{aligned} Z^1(\Gamma, M) \;&=\; \big\{f : \Gamma \to M \;:\; f(\gamma\delta) = f(\gamma)\cdot\delta + f(\delta)\big\} \quad \text{y} \\ B^1(\Gamma, M) \;&=\; \big\{f : \Gamma \to M \;:\; f(\gamma) = x - x\cdot\gamma \text{ para cierto } x \in M\big\} \;. \end{aligned}$$

Todo cociclo $f \in Z^1(\Gamma, M)$ verifica

$$\begin{aligned} f(e) \;&=\; 0 \;, \\ f(\gamma^{-1}) \;&=\; -f(\gamma)\cdot\gamma^{-1} \quad \text{y} \\ f(\gamma\delta\gamma^{-1})\cdot\gamma \;&=\; f(\delta) \;-\; f(\gamma)\cdot(1-\delta) \;, \end{aligned} \tag{V.1.2}$$

si $\gamma, \delta \in \Gamma$ y si $e \in \Gamma$ denota el elemento neutro.

Buscamos asociarle, a una forma $f \in \mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, un elemento en la cohomología $H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, M)$ del grupo $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \iota_\infty\big(\mathcal{O}^\times_{\mathfrak{a},+}\big)$. La construcción que hacemos a continuación se encuentra, con algunas modificaciones en [45, Ch. 8].

Primero, será necesario especificar el módulo de coeficientes. Con ese objetivo, profundizamos en la definición dada en la Sección IV.2. Seguimos denotando por K un anillo conmutativo con unidad. Sean $w, m \in \mathbb{Z}$ y $w \geq 0$ y sea G el grupo $G = \mathrm{GL}_2(K)$. Dado un polinomio p en las variables X e Y, con coeficientes en el anillo K, homogéneo de grado w y dada $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$, definimos un nuevo polinomio $p \cdot \gamma$ por:

$$(p \cdot \gamma)(X, Y) \;=\; \det(\gamma)^m \, p(dX - cY, -bX + aY) \; .$$

El polinomio $p \cdot \gamma$ es homogéneo del mismo grado que p y $(p, \gamma) \mapsto p \cdot \gamma$ determina una estructura de G-módulo a derecha en los polinomios homogéneos de grado w en dos indeterminadas con coeficientes en K. Denotamos este módulo por $P_w(m)(K)$. Los elementos centrales, $a \in K^\times$, actúan por multiplicación por una potencia del escalar correspondiente: $p \cdot a = a^{2m+w}\, p$.

Dado un peso $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, definimos el G^n-módulo

$$L_{\underline{k}}(K) \;=\; P_{w_1}(m_1)(K) \otimes \cdots \otimes P_{w_n}(m_n)(K) \; ,$$

donde, como en la Sección IV.2,

$$k_0 \;=\; \max_i k_i \quad , \quad m_i \;=\; \frac{k_0 - k_i}{2} \quad \text{y} \quad w_i \;=\; k_i \,-\, 2 \; .$$

Si $K = \mathbb{C}$, $L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ es un producto del módulo $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$, el codominio de una forma modular cuaterniónica. El espacio $L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ se convierte en un $B^\times$-módulo vía inmersiones $\iota_i : B^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Si $x \in L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ y $t \in F^\times$, entonces $x \cdot t = \mathrm{Nm}(t)^{k_0 - 2}\, x$. En particular, si $2 \mid k_0$, tiene sentido hablar del $\Gamma_{\mathfrak{a}}$-módulo $L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$.

V.1.2. Isomorfismos de Eichler-Shimura

Definimos, ahora, una aplicación $\mathfrak{v} : \mathcal{S}^{B}_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a}) \to \Omega^1(\mathfrak{h}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$, que, a una forma cuspidal f le asigna una 1-forma (holomorfa) en $\mathfrak{h}$ a valores en el espacio vectorial complejo $L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$. Dado un punto $z \in \mathfrak{h}$, sea $v(z) \in P_1(\mathbb{C})$ el polinomio

$$\mathrm{v}(z) \;=\; zX \,+\, Y \;=\; \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \; .$$

Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, se cumple

$$\mathrm{v}(\gamma z) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \;=\; j(\gamma, z)^{-1} \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Dados $w \geq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, miramos a $\mathrm{v}(z)^w$ como elemento de $P_w\,(m)\,(\mathbb{C})$ y, recordando que $\gamma^\iota = \det(\gamma)\gamma^{-1}$, deducimos que

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(z)^w \cdot \gamma^{-1} \;&=\; \det(\gamma)^{-m} \left(\mathrm{v}(z)^w\right)\Big(\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \,(\det(\gamma)^{-1}\,\gamma^\iota)^\iota\Big) \\ &=\; \det(\gamma)^{-m} \left(\begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} \det(\gamma)^{-1}\,\gamma^t \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right)^w .\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathrm{v}(\gamma z)^w \;=\; j(\gamma,z)^{-w} \det(\gamma)^{w+m} \left(\mathrm{v}(z)^w \cdot \gamma^{-1}\right)$$

Si $f \in \mathcal{S}^B_{\underline{k}}\,(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ es una forma cuspidal, definimos

$$\mathfrak{v}(f) \;=\; \mathrm{v}(z)^{w_1} \otimes f(z)\,dz\ ,$$

con $\mathrm{v}(z)^{w_1} \in P_{w_1}\,(m_1)\,(\mathbb{C})$.

Observación V.4. Calculamos el pullback de $\mathfrak{v}(f)$ por una transformación γ. De la expresión (V.1.1) y recordando que $w_1 = k_1 - 2$, se deduce que

$$\begin{aligned}\gamma^*\mathfrak{v}(f) \;&=\; \mathrm{v}(\gamma z)^{w_1} \otimes f(\gamma z)\,d(\gamma z) \\ &=\; \frac{\det(\gamma_1)^{w_1+m_1}}{j(\gamma_1,z)^{w_1}} \left(\mathrm{v}(z)^{w_1}\cdot\gamma^{-1}\right) \otimes f(\gamma z)\,\frac{\det(\gamma_1)}{j(\gamma_1,z)^2}\,dz \\ &=\; \left(\mathrm{v}(z)^{w_1}\cdot\gamma^{-1}\right) \otimes \left(\frac{\det(\gamma_1)^{k_1+m_1-1}}{j(\gamma_1,z)^{k_1}} f(\gamma z)\right) dz\ .\end{aligned}$$

Es decir, en general,

$$\gamma^*\mathfrak{v}(f) \;=\; \left(\mathrm{v}(z)^{w_1} \otimes f\big|_{\underline{k}}\gamma(z)\right)\cdot\gamma^{-1}\,dz \;=\; \mathfrak{v}\big(f\big|_{\underline{k}}\gamma\big)\cdot\gamma^{-1}\ . \tag{V.1.3}$$

Si $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, entonces $\gamma^*\mathfrak{v}(f) = \mathfrak{v}(f)\cdot\gamma^{-1}$.

Sea $\tau_0 \in \mathfrak{h}$ y sea $p_0 \in L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$. Dada una forma cuspidal f, la expresión

$$\varphi(\tau) \;=\; \int_{\tau_0}^{\tau} \mathfrak{v}(f) \;+\; p_0$$

define una función $\mathfrak{h} \to L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$. Por la Observación V.4, dada $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma\tau) \;&=\; \int_{\gamma\tau_0}^{\gamma\tau} \mathfrak{v}(f) \;+\; \int_{\tau_0}^{\gamma\tau_0} \mathfrak{v}(f) \;+\; p_0 \;=\; \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \mathfrak{v}(f)\right)\cdot\gamma^{-1} \;+\; \int_{\tau_0}^{\gamma\tau_0} \mathfrak{v}(f) \;+\; p_0 \\ &=\; \varphi(\tau)\cdot\gamma^{-1} \;+\; \tilde{t}(\gamma)\ ,\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{t}(\gamma) := \int_{\tau_0}^{\gamma\tau_0} \mathfrak{v}(f) + p_0 \cdot (1-\gamma^{-1}) .$$

La función $t : \Gamma_{\mathfrak{a}} \to L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ dada por $t(\gamma) = \tilde{t}(\gamma^{-1})$ verifica

$$t(\gamma\delta) = t(\gamma)\cdot\delta + t(\delta) .$$

Es decir, $t \in Z^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$. Cambiando p_0 por algún otro elemento del módulo $L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$, la función que se obtiene en lugar de t difiere de ésta en un coborde. Definimos, dada una forma cuspidal f, una función $t_f : \Gamma_{\mathfrak{a}} \to L_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ por

$$t_f(\gamma) = \int_{\tau_0}^{\gamma^{-1}\tau_0} \mathfrak{v}(f)$$

y, al igual que t, la función t_f está definida, módulo $B^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$, independientemente de τ_0 y satisface $t_f(\gamma\delta) = t_f(\gamma)\cdot\delta + t_f(\delta)$. La aplicación $f \mapsto [t_f]$ determina una transformación $\mathbb{C}$-lineal

$$\mathrm{ES}_{\mathfrak{a}} : \mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\mathfrak{a}) \to H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$$

Como, los operadores de Hecke actúan en los espacios $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\mathfrak{a})$ de manera conjunta, consideramos

$$\mathrm{ES} : \mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}) \to H = \bigoplus_{\mathfrak{a}} H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$$

dada por $\mathrm{ES} = \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathrm{ES}_{\mathfrak{a}}$.

Observación V.5. Repitiendo el razonamiento anterior con la parte real $\mathrm{Re}(\mathfrak{v}(f))$ en lugar de $\mathfrak{v}(f)$ y $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{C}$, se deduce que la aplicación $f \mapsto \text{clase}\Big[\gamma \mapsto \int_{\tau_0}^{\gamma^{-1}\tau_0} \mathrm{Re}(\mathfrak{v}(f))\Big]$ determina una transformación lineal *real* $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N},\mathfrak{a}) \to H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{R}))$. Esta transformación es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales (ver [45, Thm. 8.4]). Se puede obtener un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios, por medio de una involución en H. La definición que proporcionamos de dicha involución está adaptada de [49, § 2.4].

Recordemos de § II.7 el grupo de clases $\mathrm{Cl}^{(+)}(F) = F^{\times}_{(+)}\backslash\widehat{F}^{\times}/\widehat{\mathfrak{o}_F}^{\times}$, donde $F^{\times}_{(+)} = \mathrm{nrd}(B^{\times})$ es la imagen de la norma reducida en $F^{\times}$. El núcleo del epimorfismo canónico $\mathrm{Cl}^{+}(F) = F^{\times}_{+}\backslash\widehat{F}^{\times}/\widehat{\mathfrak{o}_F}^{\times} \to \mathrm{Cl}^{(+)}(F)$ está dado por $F^{\times}_{(+)}/F^{\times}_{+} = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^r$, donde r es la cantidad de lugares arquimedianos no ramificados de B.[4] Puesto que la cantidad de

[4] ver la Observación II.22.

lugares arquimedianos en donde el álgebra B/F no ramifica es $r=1$, el núcleo es trivial –este es el caso, si y sólo si existe una unidad $u \in \mathfrak{o}_F^\times$ que cumple $v_i(u)>0$ para $i \geq 2$ y $v_1(u)<0$– o bien es cíclico de orden 2. En todo caso, podemos elegir un ideal $\mathfrak{m}$ de F cuya clase estricta genere el núcleo del morfismo canónico $\mathrm{Cl}^+(F) \to \mathrm{Cl}^{(+)}(F)$. Dado un representante $\mathfrak{a}$ del grupo de clases estrictas, existe un único representante $\mathfrak{a}'$ tal que $[\mathfrak{a}\mathfrak{m}]=[\mathfrak{a}']$. En particular, las clases de $\mathfrak{a}$ y de $\mathfrak{a}'$ son iguales en $\mathrm{Cl}^{(+)}(F)$. Ahora, como B/F es indefinida, según el Teorema II.21, la norma reducida induce un isomorfismo entre este grupo de clases y el cociente $B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$. Deducimos que existe $\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} \in B^\times$ tal que $\det((\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'})_1)<0$ y $\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1}\widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times$, o, lo que es lo mismo,

$$\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\,\Gamma_{\mathfrak{a}}\,\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1} \;=\; \Gamma_{\mathfrak{a}'}\ .$$

Dado $f \in Z^1(\Gamma_{\mathfrak{a}'}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$, sea $f\big|W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} \in Z^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$ el cociclo definido por

$$f\big|W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}(\gamma) \;=\; f(\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\gamma\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1})\cdot\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\ . \tag{V.1.4}$$

Si $f \in B^1(\Gamma_{\mathfrak{a}'}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$, entonces la igualdad $(1-\mu\gamma\mu^{-1})\mu = \mu(1-\gamma)$ implica que $f\big|W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}$ es un coborde. Queda determinada una transformación lineal

$$W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\ :\ H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}'}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C})) \;\to\; H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))\ ,$$

para cada par de representantes $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ tales que $[\mathfrak{a}\mathfrak{m}]=[\mathfrak{a}']$. Denotamos por W_∞ el endomorfismo inducido en H:

$$(f_{\mathfrak{a}'})_{\mathfrak{a}'}\big|W_\infty \;=\; (f_{\mathfrak{a}'}\big|W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'})_{\mathfrak{a}}\ .$$

Observación V.6. La definición de $W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}$ no depende de la elección de $\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}$. Sea $\nu = \nu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} \in B^\times$ tal que $\det(\nu_1)<0$ y $\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \nu^{-1}\widehat{\alpha}'\widehat{\mathcal{O}}^\times$ y sea $\mu=\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}$. Sea $f \in Z^1(\Gamma_{\mathfrak{a}'}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$ y sea g el cociclo en $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ dado por $g(\gamma)=f(\mu\gamma\mu^{-1})\cdot\mu$. La igualdad $\nu\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \mu\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$ implica que $\mu^{-1}\nu \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, con lo cual, por la expresión (V.1.2),

$$\begin{aligned} f(\nu\gamma\nu^{-1})\cdot\nu \;&=\; g\big((\mu^{-1}\nu)\,\gamma\,(\mu^{-1}\nu)^{-1}\big)\cdot(\mu^{-1}\nu) \\ &=\; g(\gamma) \;-\; g(\mu^{-1}\nu)\cdot(1-\gamma) \;\in\; f(\mu\gamma\mu^{-1})\cdot\mu \;+\; B^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))\ . \end{aligned}$$

Por la Observación V.6, la igualdad $[\mathfrak{m}]^2=[1]$ en $\mathrm{Cl}^+(F)$ implica que W_∞ es una involución en H. Si $[\mathfrak{a}\mathfrak{m}]=[\mathfrak{a}']$ entonces $[\mathfrak{a}'\mathfrak{m}]=[\mathfrak{a}]$. En particular, W_∞^2 es diagonal y es igual a $W_{\infty,\mathfrak{a}',\mathfrak{a}} \circ W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}$ en la componente correspondiente a $\mathfrak{a}$. Tomando $\mu_{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}} = \mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1}$ en la definición de $W_{\infty,\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}$, se deduce que W_∞^2 es la identidad en cada componente.

Por medio de W_∞, podemos descomponer el espacio H como suma directa de autoespacios para la involución: $H = H^+ \oplus H^-$, donde

$$H^\pm \;=\; \Big\{ f \in H\ :\ f\big|W_\infty = \pm f \Big\}\ .$$

Teorema V.7 ([32, Propo. 4.4])**.** *Si* $\mathrm{ES}^+ : \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}) \to H^+$ *denota la composición de* ES *con la proyección en el autoespacio* H^+*, entonces* ES *es un isomorfismo de* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales.*

V.1.3. Acción de Hecke en cohomología

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathfrak{o}_F$ que no divide a $\mathfrak{D}\mathfrak{N}$ y sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ representantes que cumplen con $[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}]$. Si $f \in \mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{b})$, el operador de Hecke en f,

$$T_{\mathfrak{p}} f \; = \; \sum_{\varpi} f\big|_{\underline{k}} \varpi \; ,$$

define una forma en $\mathcal{S}^B_{\underline{k}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})$, donde la suma se realiza sobre representantes de $\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. El grupo $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ actúa *derecha* sobre este conjunto. Si $\varpi \in \Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ y $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$, existen $\varpi_\gamma \in \Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ y $\delta_\varpi \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ tales que

$$\varpi\gamma \; = \; \delta_\varpi \varpi_\gamma \; . \tag{V.1.5}$$

Así, en analogía con la definición de $T_{\mathfrak{p}}$, se define, dada $f \in H^1(\Gamma_{\mathfrak{b}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$, un elemento $T(\mathfrak{p})f$ del grupo $H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$ como la clase del cociclo

$$T(\mathfrak{p})f \; : \; \gamma \mapsto \sum_{\varpi} f(\delta_\varpi)^{\varpi_\gamma} \; . \tag{V.1.6}$$

Observación V.8. La expresión (V.1.6) define un cociclo en $Z^1(\Gamma_a, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$. Dadas $\gamma, \gamma' \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$,

$$\varpi\,(\gamma\gamma') \; = \; (\delta_\varpi \varpi_\gamma)\,\gamma' \; = \; (\delta_\varpi \delta'_{\varpi_\gamma})\,(\varpi_\gamma)_{\gamma'} \; ,$$

para ciertas $\delta_\varpi, \delta'_{\varpi_\gamma} \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$. En particular, la permutación $\varpi \mapsto \varpi_{\gamma\gamma'}$ es la composición de las permutaciones determinadas por γ y por γ' y, además, si denotamos δ''_ϖ al elemento que verifica $\varpi\,(\gamma\gamma') = \delta''_\varpi \varpi_{\gamma\gamma'}$, vale que $\delta''_\varpi = \delta_\varpi \delta'_{\varpi_\gamma}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\big(T(\mathfrak{p})f\big)(\gamma\gamma') \; &= \; \sum_{\varpi} f(\delta_\varpi \delta'_{\varpi_\gamma}) \cdot (\varpi_\gamma)_{\gamma'} \; = \; \sum_{\varpi} f(\delta_\varpi) \cdot \delta'_{\varpi_\gamma}(\varpi_\gamma)_{\gamma'} \; + \; f(\delta'_{\varpi_\gamma}) \cdot (\varpi_\gamma)_{\gamma'} \\
&= \; \Big(\sum_{\varpi} f(\delta_\varpi) \cdot \varpi_\gamma\Big) \cdot \gamma' \; + \; \sum_{\varpi} f(\delta'_{\varpi_\gamma}) \cdot (\varpi_\gamma)_{\gamma'} \\
&= \; \big(T(\mathfrak{p})f\big)(\gamma) \cdot \gamma' \; + \; \big(T(\mathfrak{p})f\big)(\gamma') \; .
\end{aligned}$$

Si $f = \partial x \in B^1(\Gamma_{\mathfrak{b}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$,

$$\begin{aligned}
\big(T(\mathfrak{p})f\big)(\gamma) \; &= \; \sum_{\varpi} x \cdot (1 - \delta_\varpi)\,\varpi_\gamma \; = \; \Big(\sum_{\varpi} x \cdot \varpi_\gamma\Big) \; - \; \sum_{\varpi} x \cdot \varpi\gamma \\
&= \; \Big(\sum_{\varpi} x \cdot \varpi\Big) \cdot (1 - \gamma) \; .
\end{aligned}$$

Las transformaciones $T(\mathfrak{p}) : \; H^1(\Gamma_{\mathfrak{b}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C})) \to H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$ inducen un endomorfismo $T(\mathfrak{p})$ en la suma directa H, que, como los operadores $T_{\mathfrak{p}}$ en formas cuspidales, permuta las componentes.

Proposición V.9. *Con estas definiciones,*

$$T(\mathfrak{p})\big(\mathrm{ES}(f)\big) \;=\; \mathrm{ES}\big(T_{\mathfrak{p}} f\big) \;,$$

para toda $f \in \mathcal{S}_{\underline{k}}^{B}\,(\mathfrak{N})$.

Demostración. Sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ tales que $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}\mathfrak{p}]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{\mathfrak{a}}\big(T_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{b}}\big)(\gamma) \;&=\; \int_{\tau_0}^{\gamma^{-1}\tau_0} \sum_{\varpi} \mathfrak{v}\big(f_{\mathfrak{b}}\big|_{\underline{k}}\varpi_\gamma\big) \;=\; \int_{\tau_0}^{\gamma^{-1}\tau_0} \sum_{\varpi} \varpi_\gamma^{*}\mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \cdot \varpi_\gamma \\
&= \sum_{\varpi} \int_{\varpi_\gamma\tau_0}^{\varpi_\gamma\gamma^{-1}\tau_0} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \cdot \varpi_\gamma \;=\; \sum_{\varpi} \Big(\int_{\tau_0}^{\delta_{\varpi}^{-1}\varpi\tau_0} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \;-\; \int_{\tau_0}^{\varpi_\gamma\tau_0} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \Big) \cdot \varpi_\gamma \\
&= \sum_{\varpi} \Big(\int_{\tau_1}^{\delta_{\varpi}^{-1}\tau_1} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \;+\; p_{\varpi} \cdot \delta_{\varpi} \Big) \cdot \varpi_\gamma \;-\; \sum_{\varpi} p_{\varpi_\gamma} \cdot \varpi_\gamma \;.
\end{aligned}$$

La última igualdad es cierta módulo cobordes, donde $\tau_1 \;=\; \varpi\tau_0$ y $p_{\varpi} \;=\; \int_{\tau_0}^{\varpi\tau_0} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}})$. Pero, entonces, dado que $\delta_{\varpi}\varpi_\gamma = \varpi\gamma$,

$$\mathrm{ES}_{\mathfrak{a}}\big(T_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{b}}\big)(\gamma) \;=\; \sum_{\varpi} \int_{\tau_1}^{\delta_{\varpi}^{-1}\tau_1} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \cdot \varpi_\gamma \;-\; x \cdot (1-\gamma) \;=\; T(\mathfrak{p})\big(\mathrm{ES}_{\mathfrak{b}}(f_{\mathfrak{b}})\big)(\gamma) \;,$$

con $x = \sum_{\varpi} \int_{\tau_0}^{\varpi\tau_0} \mathfrak{v}(f_{\mathfrak{b}}) \cdot \varpi$. □

Proposición V.10. *Los operadores de Hecke* $T(\mathfrak{p})$ *conmutan con la involución* W_∞*. Es decir,*

$$T(\mathfrak{p})\big(f\big|W_\infty\big) \;=\; \big(T(\mathfrak{p})f\big)\big|W_\infty \;,$$

para toda $f \in H$*.*

Demostración. Supongamos que $[\mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}\mathfrak{p}]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{m}] = [\mathfrak{a}']$ y que $[\mathfrak{b}\mathfrak{m}] = [\mathfrak{b}']$. Entonces $[\mathfrak{a}'] = [\mathfrak{b}'\mathfrak{p}]$. Sea $f \in H^1(\Gamma_{\mathfrak{b}'}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))$. Por un lado,

$$T(\mathfrak{p})\big(f\big|W_{\infty,\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\big)(\gamma) \;=\; \sum_{\varpi} \big(f\big|W_{\infty,\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\big)(\delta_{\varpi}) \cdot \varpi_\gamma \;=\; \sum_{\varpi} f(\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\delta_{\varpi}\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}) \cdot \mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\varpi_\gamma \;.$$

Evaluando en el orden inverso,

$$\big(T(\mathfrak{p})f\big)\big|W_{\infty,\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}(\gamma) \;=\; \big(T(\mathfrak{p})f\big)(\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\gamma\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1}) \cdot \mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} \;=\; \sum_{\varpi'} f(\delta'_{\varpi'}) \cdot \varpi'_{\gamma'}\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} \;,$$

donde ϖ' recorre un sistema de representantes de $\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'}$, γ' denota el conjugado $\gamma' = \mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}\gamma\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1} \in \Gamma_{\mathfrak{a}'}$ y los elementos $\delta'_{\varpi'} \in \Gamma_{\mathfrak{b}'}$ son tales que $\varpi'\gamma' = \delta'_{\varpi'}\varpi'_{\gamma'}$. Pero

$$\varpi'\gamma' \;=\; \delta'_{\varpi'}\varpi'_{\gamma'} \quad\Leftrightarrow\quad (\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}\varpi'\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'})\,\gamma \;=\; \mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}\delta'_{\varpi'}\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\,(\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}\varpi'_{\gamma'}\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}) \;,$$

con $\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}\delta'_{\varpi'}\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} \in \Gamma_{\mathfrak{b}}$ y la aplicación $\varpi \mapsto \mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\varpi\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}^{-1}$ es una correspondencia $\Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \xrightarrow{\sim} \Theta(\mathfrak{p})_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'}$. En definitiva,

$$\sum_{\varpi'} f(\delta'_{\varpi'}) \cdot \varpi'_{\gamma'}\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'} = \sum_{\varpi} f(\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\delta_{\varpi}\mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}^{-1}) \cdot \mu_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'}\varpi_{\gamma} \ ,$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario V.11. *El isomorfismo* $\mathrm{ES}^+ : \mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathfrak{a}} H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(\mathbb{C}))^+$ *es equivariante respecto de la acción de Hecke.*

V.1.4. Comentarios acerca del método indefinido

En base a los resultados enunciados anteriormente, concluimos que es posible realizar los espacios de formas cuaterniónicas $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$ en la cohomología de los grupos $\Gamma_{\mathfrak{a}}$. Expresar este pasaje en forma algorítmica presenta sus propias dificultades. Para concluir la descripción del método indefinido, mencionamos algunos de los pasos involucrados y los problemas que presentan. Se puede encontrar una descripción más detallada en [21].

Asumimos dadas instancias concretas del cuerpo F de grado n, del álgebra B/F de discriminante $\mathfrak{D}$ que ramifica en $n-1$ lugares arquimedianos y del ideal $\mathfrak{N}$ coprimo con el discriminante. La primera reducción consiste en hallar un *splitting* de B, es decir, una extensión galoisiana K/F, de manera que $B \otimes_F K \simeq \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$. Todos los cálculos se realizan, entonces, de manera exacta sobre el cuerpo K. Restringiendo a los módulos $L_{\underline{k}}(K)$, la acción de los operadores de Hecke se determina en el K-espacio vectorial

$$H = \bigoplus_{\mathfrak{a}} H^1(\Gamma_{\mathfrak{a}}, L_{\underline{k}}(K)) \ .$$

Para poder llevar esto a cabo, es necesario hallar una descripción de este espacio en términos de alguna base conveniente.

Supongamos dado, entonces, un orden de Eichler $\mathcal{O}$ de nivel $\mathfrak{N}$ en B. En primer lugar, se obtiene un sistema de representantes $\{\mathfrak{a}\}$ de las clases estrictas. Esto se realiza con el requerimiento adicional de que los representantes sean íntegros y coprimos con el discriminante $\mathfrak{D}$ y con el nivel $\mathfrak{N}$. Habiendo hecho esto, se busca un conjunto $\{I_{\mathfrak{a}}\}_{\mathfrak{a}}$ de ideales del álgebra B tal que

$$I_{\mathfrak{a}} \subset \mathcal{O} \quad , \quad \mathcal{O}_{der}(I_{\mathfrak{a}}) = \mathcal{O} \quad \text{y} \quad \mathrm{nrd}(I_{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}$$

para cada representante $\mathfrak{a}$.[5] Notamos que, entonces $I_{\mathfrak{a}} = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$ para algún $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathcal{O}}$ y que los órdenes "compañeros" $\mathcal{O}_{\mathfrak{a}}$ están dados por

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}_{izq}(I_{\mathfrak{a}}) \ .$$

[5] ver [48, Ch. II, Thm. 2.3] y [29, Lemma 7.2]

Usando los algoritmos descriptos en [50] se pueden hallar presentaciones $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \langle S_{\mathfrak{a}} | R_{\mathfrak{a}} \rangle$ finitas minimales para cada representante $\mathfrak{a}$ junto con una solución al problema de la palabra para dichas presentaciones. Éste es el paso más costoso,[6] pero es lo que permite realizar los cálculos de manera explícita.

V.2. Método definido

Sea B/F un álgebra totalmente definida y sea $\mathcal{O} \subset B$ un orden de Eichler. Denotamos por $\mathcal{I}(\mathcal{O})$ el conjunto de ideales (invertibles) I de B cuyo orden a derecha es $\mathcal{O}_{der}(I) = \mathcal{O}$. Sea $H = \#\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$ y fijemos un sistema de representantes $\{I_t\}_t$ de las clases a izquierda. Dado un ideal $I \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$, denotamos por $[I]$, tanto su clase en $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$, como la función característica de la misma. El *estabilizador* de un ideal I es el grupo

$$\Gamma_I := \left\{ b \in B^\times \,:\, bI = I \right\} = \mathcal{O}_{izq}(I)^\times \,.$$

Los elementos centrales contenidos en este grupo son precisamente $\Gamma_I \cap F^\times = \mathfrak{o}_F^\times$. Las inmersiones reales de F determinan una inclusión discreta en un compacto:

$$\Gamma_I/\mathfrak{o}_F^\times \hookrightarrow B_\infty^\times/\mathrm{Z}(\mathbb{R}) \simeq (S^3)^n \,,$$

de donde se deduce que

$$w_I := \left| \Gamma_I/\mathfrak{o}_F^\times \right| < \infty \,.$$

Todo ideal invertible de B es localmente principal y la correspondecia $\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}(\mathcal{O})$ está determinada por $I = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$.[7] Sean $\widehat{\alpha}_t \in \widehat{B}^\times$ tales que $I_t = \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}} \cap B$. Si $I = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$, escribimos $[\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ para indicar la clase, o bien la función característica en $\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times$, correspondiente a $[I]$.

Una forma modular cuaterniónica para B de nivel $\mathcal{O}$ y peso $\underline{k}$ es una función $f : \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(\gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = f(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)^{\gamma^{-1}} \,.$$

Alternativamente, una forma modular es una función $f : \mathcal{I}(\mathcal{O}) \to W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ equivariante respecto de la acción a izquierda de $B^\times$. Esta equivalencia permite dar una descripción alternativa de los operadores de Hecke.

Según (IV.5.2),

$$\big(T_{\mathfrak{p}} f\big)(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_i f(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \,.$$

---

[6] [21]

[7] ver § II.7

Fijado $\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$, para cada $\widehat{\pi}_i$ existe un único $t \in [\![1, H]\!]$ tal que $[\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times] = [\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times]$. Existe, entonces, un elemento $\rho_i \in B^\times$ que verifica

$$\rho_i\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times \;=\; \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times \;. \tag{V.2.1}$$

Entonces podemos comprobar que

$$\big(T_{\mathfrak{p}}f\big)(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;=\; \sum_{t=1}^{H}\sum_{i} f(\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times)^{\rho_i}\,[\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times](\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;.$$

Si $\rho_i' \in B^\times$ cumple con (V.2.1), entonces $\rho_i^{-1}\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times = \rho_i'^{-1}\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times$, lo que significa que ρ_i y ρ_i' difieren en una unidad del orden $\mathcal{O}_t = \mathcal{O}_{izq}(I_t)$:

$$\rho_i' \;\in\; \Gamma_t\,\rho_i \;.$$

Sea $\widehat{\pi} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$, es decir, $\widehat{\pi} \in \widehat{\mathcal{O}}$ que cumple $\mathrm{nrd}(\widehat{\pi}) \in \widehat{p\mathfrak{o}_F}^\times$. Como antes, existe un único $t \in [\![1, H]\!]$ y un $\rho \in B^\times$ tales que $\rho\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times$. El elemento ρ es único módulo multiplicar a izquierda por Γ_t. Notamos que

$$\rho \;\in\; \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\alpha}^{-1} \,\cap\, B^\times \;.$$

Llamamos $I = \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}} \cap B$, $I_t = \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}} \cap B$ y definimos

$$L \;=\; II_t^{-1}\rho \;=\; \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}_t^{-1}\rho \,\cap\, B \;=\; \big(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}^{-1}\big)\,(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}\widehat{\alpha}^{-1}) \,\cap\, B \;.$$

Cambiando ρ por $\rho' \in \Gamma_t\rho$, se obtiene el mismo retículo L en B y cambiando $\widehat{\pi}$ por $\widehat{\pi}' \in \widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}$, también. Este retículo de B (no necesariamente es un $\mathcal{O}$-ideal a derecha) cumple:

$$\mathcal{O}_{izq}(L) \;=\; \mathcal{O}_{izq}(I) \quad , \quad L \,\subset\, \mathcal{O}_{izq}(L) \quad \text{y} \quad \mathrm{nrd}(L) \;=\; \mathfrak{p} \;.$$

Recíprocamente, si $L \subset B$ posee estas propiedades, entonces $L = \big(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}^{-1}\big)\,(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}\widehat{\alpha}^{-1}) \cap B$ para cierto $\widehat{\pi} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p})$. Desandando los pasos previos, vemos que existe un único $t \in [\![1, H]\!]$ tal que $[\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times] = [\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times]$ y existe un $\rho \in B^\times$ tal que $\rho\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times$; es decir, $\rho \in \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\alpha}^{-1}$ y

$$L \;=\; \big(\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\alpha}_t^{-1}\big)\,\big(\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times\widehat{\pi}\widehat{\alpha}^{-1}\big) \,\cap\, B \;=\; II_t^{-1}\rho \;.$$

Para expresar la conclusión del argumento anterior de manera simple, introducimos la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\Theta(\mathfrak{p}) \;&=\; \widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\mathfrak{I}(\mathfrak{p}) \;=\; \widehat{\mathcal{O}}^\times\backslash\Big\{\widehat{\pi} \in \widehat{\mathcal{O}} \,:\, \mathrm{nrd}(\widehat{\pi}) \in \widehat{p\mathfrak{o}_F}^\times\Big\} \;, \\
\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t \;&=\; \Gamma_t\backslash\Big\{\rho \in I_tI^{-1} \,:\, \mathrm{nrd}(II_t^{-1}\rho) = \mathfrak{p}\Big\} \quad \text{y} \\
\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(I) \;&=\; \Big\{L \subset B \text{ retículo completo} \,:\, L \subset \mathcal{O}_{izq}(L) = \mathcal{O}_{izq}(I),\, \mathrm{nrd}(L) = \mathfrak{p}\Big\} \;.
\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos biyecciones

$$\Theta(\mathfrak{p}) \;\leftrightarrow\; \bigsqcup_{t=1}^{H} \mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t \;\leftrightarrow\; \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(I)\;, \tag{V.2.2}$$

dadas por $\widehat{\pi} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{p}) \mapsto \Gamma_t\rho$ –donde t y $\rho \in B^\times$ cumplen que $\rho\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times = \widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times$– y por $\rho \mapsto L = II_t^{-1}\rho$.

Usando las biyecciones (V.2.2), para cada $t \in [\![1, H]\!]$ podemos reescribir

$$\sum_i f(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\,[\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times](\widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \;=\; \sum_{\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t} f(\widehat{\alpha}_t\widehat{\mathcal{O}}^\times)^\rho \;=\; \sum_{\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t} f(I_t)^\rho\;.$$

Las sumatorias de la derecha, son sobre representantes de $\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t$ y, como vale que $f(I_t)^{\lambda\rho} = f(\lambda^{-1}I_t)^\rho = f(I_t)^\rho$, si $\lambda \in \Gamma_t$, entonces las mismas están bien definidas. Reemplazando idèles por ideales, obtenemos la siguiente expresión para $T_{\mathfrak{p}}$:

$$\big(T_{\mathfrak{p}}f\big)(I) \;=\; \sum_{t=1}^{H}\sum_{\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t} f(I_t)^\rho \tag{V.2.3}$$

Buscamos ahora una expresión para $T_{\mathfrak{p}}$ en términos de ideales en $\mathcal{I}(\mathcal{O})$. Definimos el siguiente conjunto asociado a $I \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$:

$$\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I) \;=\; \Big\{J \in \mathcal{I}(\mathcal{O}) \;:\; J \supset I,\, \mathrm{nrd}(I) = \mathfrak{p}\cdot\mathrm{nrd}(J)\Big\}\;.$$

Este conjunto está en biyección con $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(I)$ vía: $\big(L \mapsto L^{-1}I\big) : \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(I) \to \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)$. Por otra parte, la composición $\bigsqcup_t \mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t \to \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(I) \to \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)$ está dada por

$$\Gamma_t\rho \;\mapsto\; II_t^{-1}\rho \;\mapsto\; \big(II_t^{-1}\rho\big)^{-1}I \;=\; \rho^{-1}I_t$$

Así, concluimos que

$$\big(T_{\mathfrak{p}}f\big)(I) \;=\; \sum_{t=1}^{H}\sum_{\mathscr{R}_{\mathfrak{p}}(I)_t} f(\rho^{-1}I_t) \;=\; \sum_{J\in\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)} f(J)\;. \tag{V.2.4}$$

Si $\underline{k} \neq (2, \ldots, 2)$, toda forma modular para B de peso $\underline{k}$ determina una forma cuspidal vía la correspondencia de Jacquet-Langlands. En este caso, definimos $\mathcal{S}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N}) := \mathcal{M}_{\underline{k}}^B(\mathfrak{N})$. En cambio, cuando $\underline{k} = (2, \ldots, 2)$, no toda forma $f \in \mathcal{M}_{(2,\ldots,2)}^B(\mathfrak{N})$ tiene asociada una forma de Hilbert cuspidal. A continuación, definimos el espacio de formas cuspidales de peso paralelo 2 para un álgebra de cuaterniones totalmente definida y demostramos que los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}\mathfrak{N}$ son normales.

Peso paralelo $(2, \ldots, 2)$

Si $\underline{k} = \underline{2} = (2, \ldots, 2)$, el $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^n$-módulo $W_{\underline{k}}(\mathbb{C})$ es, entonces, trivial y una forma modular $f \in \mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$ es, simplemente, una función $f : \mathcal{I}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ constante en clases de isomorfismo, es decir, $f(bI) = f(I)$ para todo $b \in B^\times$. Un ejemplo sencillo de forma modular de nivel $\mathcal{O}$ y peso $\underline{2}$ está dado por la función característica de un ideal, $[I]$. De hecho, si $\{I_1, \ldots, I_H\}$ es un sistema de representantes de las clases a izquierda, el conjunto $\{[I_1], \ldots, [I_H]\}$ constituye una base de $\mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$.

Pasamos ahora a los operadores de Hecke. Tomando $f = [I]$ en (V.2.4), obtenemos

$$\big(T_{\mathfrak{p}}[I]\big)(I') = \sum_{J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')} [I](J) \ . \tag{V.2.5}$$

Lema V.12. *Dados ideales $J, J' \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$,*

$$J' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(J) \Leftrightarrow \mathfrak{p}^{-1}J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(J') \ .$$

Demostración. Si $J' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(J)$, entonces $J' \supset J$ y, en particular, $JJ'^{-1} \subset \mathcal{O}_{izq}(J')$. De esto se deduce que $J'J^{-1} = (JJ'^{-1})^{-1} = \mathrm{nrd}(JJ'^{-1})^{-1}\,\overline{JJ'^{-1}} \subset \mathfrak{p}^{-1}\,\mathcal{O}_{izq}(J')$. Esto quiere decir que $(\mathfrak{p}^{-1}J)^{-1} \subset J'^{-1}$ y que $J' \subset \mathfrak{p}^{-1}J$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p}^{-1}J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(J')$, entonces $J' \subset \mathfrak{p}^{-1}J$ y, en particular, $J'(\mathfrak{p}^{-1}J)^{-1} \subset \mathcal{O}_{izq}(J)$. De esto, se deduce que $JJ'^{-1} \subset (J'J^{-1})^{-1} = \mathrm{nrd}(J'J^{-1})^{-1}\,\overline{J'J^{-1}} = \mathfrak{p}\,\overline{J'J^{-1}}$. Pero esto es igual a $\overline{J'(\mathfrak{p}^{-1}J)^{-1}}$ que está contenido en $\mathcal{O}_{izq}(J)$. Así, $J'^{-1} \subset J^{-1}$ y $J \subset J'$. $\square$

Observación V.13. Como consecuencia del Lema V.12, dados $I, I' \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$,

$$\Big\{b \in B^\times \,:\, b\,\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')\Big\} = \Big\{b \in B^\times \,:\, b^{-1}I' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)\Big\} \ .$$

En particular,

$$\begin{aligned}
\Big|\Big\{J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I') \,:\, J \sim \mathfrak{p}^{-1}I\Big\}\Big| \cdot w_{\mathfrak{p}^{-1}I} &= \Big|\Big\{b \in B^\times \,:\, b\,\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')\Big\}/\Gamma_{\mathfrak{p}^{-1}I}\Big| \cdot w_{\mathfrak{p}^{-1}I} \\
&= \Big|\Big\{b \in B^\times \,:\, b\,\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')\Big\}/\mathfrak{o}_F^\times\Big| = \Big|\mathfrak{o}_F^\times\backslash\Big\{b \in B^\times \,:\, b^{-1}I' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)\Big\}\Big| \\
&= \Big|\Gamma_{I'}\backslash\Big\{b \in B^\times \,:\, b^{-1}I' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)\Big\}\Big| \cdot w_{I'} = \Big|\Big\{J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I) \,:\, J \sim I'\Big\}\Big| \cdot w_{I'} \ .
\end{aligned}$$

En $\mathcal{M}_{\underline{2}}^B(\mathfrak{N})$ definimos el producto interno

$$\langle [I], [J] \rangle := \begin{cases} \frac{1}{w_I} & \text{si } [I] = [J] \ , \\ 0 & \text{si } [I] \neq [J] \ . \end{cases} \tag{V.2.6}$$

Con esta definición, la base $\{[I_1], \ldots, [I_H]\}$ es una base ortogonal.

Proposición V.14. *Dados ideales $I, I' \in \mathcal{I}(\mathcal{O})$,*

$$\langle T_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}^{-1}I], [I'] \rangle \;=\; \langle [I], T_{\mathfrak{p}}[I'] \rangle \;.$$

Demostración. De (V.2.5), deducimos que

$$\langle T_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{p}^{-1}I], [I'] \rangle \;=\; \Big(\sum_{J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')} [\mathfrak{p}^{-1}I](J) \Big) \frac{1}{w_{I'}} \quad \text{y} \quad \langle [I], T_{\mathfrak{p}}[I'] \rangle \;=\; \Big(\sum_{J' \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I)} [I'](J') \Big) \frac{1}{w_I} \;.$$

Estas dos expresiones son iguales por la Observación V.13 y porque $w_I = w_{\mathfrak{p}^{-1}I}$. □

Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_F$ tal que $(\mathfrak{p}, \mathfrak{D}\mathfrak{N}) = 1$, podemos definir el *operador diamante*, $\langle \mathfrak{p} \rangle$, como el operador asociado a $\widehat{p}$ por (IV.5.2), donde $\widehat{p} \in \widehat{F}^{\times}$ es el idèle dado por un uniformizador $p \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{p}}$ en el lugar $\mathfrak{p}$ y por 1 en $v \neq \mathfrak{p}$. En un elemento de la base, está dado por

$$\langle \mathfrak{p} \rangle [I] \;=\; [\mathfrak{p}I] \;.$$

Estos operadores son centrales. Además,

$$T_{\mathfrak{p}}^{*} \;=\; \langle \mathfrak{p} \rangle^{-1} T_{\mathfrak{p}} \;.$$

Lo que muestra que los operadores de Hecke constituyen una familia de operadores normales que conmutan entre sí y, por lo tanto, se diagonalizan simultáneamente.

Observación V.15. Recordemos que los operadores diamante actúan trivialmente en formas modulares elípticas para los grupos de congruencia $\Gamma_0(N)$ y notemos que esto no sigue siendo cierto en la situación análoga cuando $\#\mathrm{Cl}(F) > 1$.

La función constante $e_0 = \sum_{[I]} [I] \equiv 1$ es una autofución para $T_{\mathfrak{p}}$:

$$T_{\mathfrak{p}} e_0 \;=\; \sum_{[I]} \sum_{[I']} \Big(\sum_{J \in \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}(I')} [I](J) \Big) [I'] \;=\; \big(\mathbb{N}\mathfrak{p} + 1 \big) \sum_{[I']} [I'] \;.$$

También es una autofunción para $T_{\mathfrak{p}}^{*}$, pues $\langle \mathfrak{p} \rangle e_0 \;=\; \sum_{[I]} [\mathfrak{p}I]$, pero $I \mapsto \mathfrak{p}I$ es una permutación de las clases en $\mathrm{Cl}_{izq}(\mathcal{O})$.

Definición V.16. Una forma modular cuaterniónica $f \in \mathcal{M}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N})$ se dice *cuspidal*, si f es ortogonal al subespacio generado por la forma e_0.

$$\mathcal{S}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N}) \;=\; \Big\{ f \in \mathcal{M}_{\underline{2}}^{B}(\mathfrak{N}) \;:\; \langle f, e_0 \rangle = 0 \Big\} \;.$$

Bibliografía

[1] A. Borel y H. Jacquet. *Automorphic Forms and Automorphic Representations.* Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1, 189-202 (1979). 1979.

[2] J. H. Bruinier. "Hilbert Modular Forms and Their Applications". En: *The 1-2-3 of Modular Forms. Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, June 2004.* Berlin: Springer, 2008, págs. 105-179.

[3] D. Bump. *Automorphic Forms and Representations.* Vol. 55. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, págs. xiv + 574.

[4] J. W. S. Cassels y A. Fröhlich, eds. *Algebraic Number Theory.* Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union. London and New York: Academic Press 1967. xviii, 366 p. 100 s. (1967). 1967.

[5] L. Dembélé. "Explicit Computations of Hilbert Modular Forms on $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$". *Exp. Math.* 14.4 (2005), págs. 457-466.

[6] L. Dembélé. "Quaternionic Manin Symbols, Brandt Matrices, and Hilbert Modular Forms". *Math. Comput.* 76.258 (2007), págs. 1039-1057.

[7] L. Dembélé y S. Donnelly. "Computing Hilbert Modular Forms over Fields with Nontrivial Class Group". En: *Algorithmic Number Theory. 8th International Symposium, ANTS-VIII Banff, Canada, May 17–22, 2008 Proceedings.* Berlin: Springer, 2008, págs. 371-386.

[8] L. Dembélé, M. Greenberg y J. Voight. "Nonsolvable Number Fields Ramified Only at 3 and 5". *Compos. Math.* 147.3 (2011), págs. 716-734.

[9] L. Dembélé, D. Loeffler y A. Pacetti. "Non-paritious Hilbert modular forms". *Math. Z.* 292.1-2 (2019), págs. 361-385.

[10] L. Dembélé y J. Voight. "Explicit Methods for Hilbert Modular Forms". En: *Elliptic Curves, Hilbert Modular Forms and Galois Deformations.* Basel: Birkhäuser/Springer, 2013, págs. 135-198.

[11] M. Deuring. *Algebren. 2., korrig. Aufl.* Vol. 41. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[12] F. Diamond y J. Im. “Modular Forms and Modular Curves”. En: *Seminar on Fermat’s last theorem. The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 1993-1994, Toronto, Ontario, Canada. Proceedings.* Providence, RI: American Mathematical Society (publ. for the Canadian Mathematical Society), 1995, págs. 39-133.

[13] F. Diamond y J. Shurman. *A First Course in Modular Forms.* Vol. 228. Berlin: Springer, 2005, págs. xv + 436.

[14] S. Donnelly y J. Voight. *A Database of Hilbert Modular Forms.* 2016. arXiv: `1605.02637 [math.NT]`.

[15] M. Eichler. *The Basis Problem for Modular Forms and the Traces of the Hecke Operators.* Modular Functions of One Variable I, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 320, 75-151 (1973). 1973.

[16] P. Etingof y col. *Introduction to Representation Theory. With Historical Interludes By Slava Gerovitch.* Vol. 59. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011, págs. vii + 228.

[17] E. Freitag. *Hilbert Modular Forms.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990, págs. viii + 250.

[18] G. van der Geer. *Hilbert Modular Surfaces.* Vol. 16. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988, págs. ix + 291.

[19] S. S. Gelbart. *Automorphic Forms on Adele Groups.* Vol. 83. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975.

[20] S. S. Gelbart y H. Jacquet. *Forms of $GL(2)$ from the Analytic Point of View.* Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1, 213-251 (1979). 1979.

[21] M. Greenberg y J. Voight. “Computing Systems of Hecke Eigenvalues Associated to Hilbert Modular Forms”. *Math. Comput.* 80.274 (2011), págs. 1071-1092.

[22] M. Greenberg y J. Voight. “Lattice Methods for Algebraic Modular Forms on Classical Groups”. En: *Computations with Modular Forms. Proceedings of a Summer School and Conference, Heidelberg, Germany, August–September 2011.* Cham: Springer, 2014, págs. 147-179.

[23] M. Harris. *Curvas de Shimura.* Notas de un curso dictado en el marco de la escuela ICTP/CIMPA *AGrA II: Aritmética, Grupos y Análisis*, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco (2015). 2015.

[24] H. Hida. *Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series.* Vol. 26. Cambridge: Cambridge University Press, 1993, págs. ix + 386.

[25] H. Hida. *Modular Forms and Galois Cohomology.* Vol. 69. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, págs. x + 343.

[26] H. Hida. *Hilbert Modular Forms and Iwasawa Theory.* Oxford: Clarendon Press, 2006, págs. xiv + 402.

[27] H. Jacquet y R. P. Langlands. *Automorphic Forms on $GL(2)$.* Vol. 114. Springer, Cham, 1970.

[28] I. Kaplansky. "Submodules of Quaternion Algebras". *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 19 (1969), págs. 219-232.

[29] M. Kirschmer y J. Voight. "Algorithmic Enumeration of Ideal Classes for Quaternion Orders". *SIAM J. Comput.* 39.5 (2010), págs. 1714-1747.

[30] D. R. Kohel. "Hecke Module Structure of Quaternions". En: *Class Field Theory – Its Centenary and Prospect. Proceedings of the 7th MSJ International Research Institute of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, Japan, June 3–12, 1998.* Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2001, págs. 177-195.

[31] S. Mac Lane. *Homology.* Reprint of the 3rd corr. print. 1975. Berlin: Springer-Verlag, 1995, págs. x + 422.

[32] Y. Matsuhima y G. Shimura. "On the Cohomology Groups Attached to Certain Vector-valued Differential Forms on the Product of the Upper Half Planes". *Ann. Math. (2)* 78 (1963), págs. 417-449.

[33] J. S. Milne. *Algebraic Number Theory (v3.08).* Available at www.jmilne.org/math/. 2020.

[34] T. Miyake. "On Automorphic Forms on GL_2 and Hecke Operators". *Ann. Math. (2)* 94 (1971), págs. 174-189.

[35] T. Miyake. *Modular Forms.* Trad. por J. Maeda. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989, págs. viii + 335.

[36] A. Pacetti y N. Sirolli. "Computing Ideal Classes Representatives in Quaternion Algebras". *Math. Comput.* 83.289 (2014), págs. 2479-2507.

[37] A. Pizer. "On the Arithmetic of Quaternion Algebras". *Acta Arith.* 31 (1976), págs. 61-89.

[38] A. Pizer. "On the Arithmetic of Quaternion Algebras. II". *J. Math. Soc. Japan* 28 (1976), págs. 676-688.

[39] A. Pizer. "An Algorithm for Computing Modular Forms on $\Gamma_0(N)$". *J. Algebra* 64 (1980), págs. 340-390.

[40] I. Reiner. *Maximal Orders.* Reprint of the 1975 original. Vol. 28. Oxford: Oxford University Press, 2003, págs. xiv + 395.

[41] J.-P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups.* Trad. por L. L. Scott. Vol. 42. Springer, New York, NY, 1977.

[42] T. R. Shemanske y L. H. Walling. “Twists of Hilbert Modular Forms”. *Trans. Am. Math. Soc.* 338.1 (1993), págs. 375-403.

[43] G. Shimura. “Sur les intégrales attachées aux formes automorphes”. *J. Math. Soc. Japan* 11 (1959), págs. 291-311.

[44] G. Shimura. “On Dirichlet Series and Abelian Varieties Attached to Automorphic Forms”. *Ann. Math. (2)* 76 (1962), págs. 237-294.

[45] G. Shimura. *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions.* Publications of the Mathematical Society of Japan. 11. Princeton, NJ: Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press 1971. XIII, 267 p. $ 10.00. (1971). 1971.

[46] G. Shimura. “The Special Values of the Zeta Functions Associated with Hilbert Modular Forms”. *Duke Math. J.* 45 (1978), págs. 637-679.

[47] W. Stein. *Modular Forms, a Computational Approach. With an Appendix by Paul E. Gunnells.* Vol. 79. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2007, págs. xv + 268.

[48] M.-F. Vignéras. *Arithmétique des algèbres de quaternions.* Vol. 800. Springer, Cham, 1980.

[49] J. Voight. “Computing Automorphic Forms on Shimura Curves over Fields with Arbitrary Class Number”. En: *Algorithmic Number Theory. 9th International Symposium, ANTS-IX, Nancy, France, July 19–23, 2010. Proceedings.*

[50] J. Voight. “Computing Fundamental Domains for Fuchsian Groups”. *J. Théor. Nombres Bordx.* 21.2 (2009), págs. 469-491.

[51] J. Voight. “Identifying the Matrix Ring: Algorithms for Quaternion Algebras and Quadratic Forms”. En: *Quadratic and Higher Degree Forms.* New York, NY: Springer, 2013, págs. 255-298.

[52] A. Weil. *Dirichlet Series and Automorphic Forms.* Vol. 189. Springer, Cham, 1971.

[53] A. Weil. *Basic Number Theory.* 3rd. ed. Vol. 144. Springer, Berlin, 1974.